J. QUINET

curso elemental de matemáticas superiores

tomo I

complementos de álgebra
las derivadas y sus aplicaciones

Curso Elemental de Matemáticas Superiores

TOMO I

Complementos de álgebra
Las derivadas y sus aplicaciones

OBRAS DEL MISMO AUTOR PUBLICADAS POR

PARANINFO

CURSO ELEMENTAL DE MATEMATICAS SUPERIORES

TOMO I

Complementos de álgebra. Las derivadas y sus aplicaciones, con 400 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO II

Desarrollos en serie. Cálculo de complejos. Cálculo diferencial, con 700 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO III

Cálculo integral y primeras aplicaciones, con 450 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO IV

Continuación del cálculo integral y aplicaciones, con 290 ejercicios y problemas a resolver.

Cálculo integral, complementos y aplicaciones.
Cálculo de los momentos de inercia.
Algunas aplicaciones de las integrales.
La serie de *Fourier*, con *ejemplos detallados* de desarrollos.
Integración gráfica y cálculo aproximado de una integral.
Integrales curvilíneas.
Integrales curvilíneas.
Integración de diferenciales totales.
Integrales múltiples. Integrales dobles. Nociones sobre integrales triples.

TOMO V

Ecuaciones diferenciales y aplicaciones, con 300 ejercicios y problemas a resolver.

Ecuaciones de primer y segundo orden, tipos diversos, con numerosos ejemplos.
48 ejemplos de aplicaciones prácticas de las ecuaciones diferenciales a problemas (mecánica, física, electricidad, termodinámica, resistencia de materiales, etc.).
Ecuaciones en derivadas parciales (aplicación a las cuerdas vibrantes y a la propagación de la corriente eléctrica a lo largo de las líneas).
Introducción al estudio del potencial, y al estudio de los campos.

TOMO VI, con 782 ejercicios y problemas a resolver.

Geometría analítica plana.
Estudio de las cónicas y aplicaciones.
Trazado de curvas con numerosos ejemplos detallados.
Algunas aplicaciones físicas de las cónicas.

TEORIA Y PRACTICA DE LOS CIRCUITOS ELECTRONICOS Y DE LOS AMPLIFICADORES

TOMO I

Teoría y aplicaciones del cálculo de complejos al estudio de los circuitos de electrónica.

TOMO II

Los amplificadores HF y BF. Los osciladores y la modulación. Los filtros y los puentes de medida.

TOMO III

Estudio general de la propagación de la corriente HF a lo largo de las líneas y aplicaciones. Antenas. — Ecuaciones de Maxwell y aplicaciones.

SERIE POLITECNICA

Curso Elemental de Matemáticas Superiores

Cálculo diferencial e integral y Geometría analítica plana
con un gran número de ejemplos y aplicaciones

por

J. QUINET

Ingeniero de la Escuela Superior de Electricidad
Profesor de la Escuela Nacional de Radioelectricidad de Clichy
Profesor honorario de Matemáticas generales de la Escuela Central de T.S.H.

Prólogo de

R. BARTHÉLEMY

Miembro de la Academia de Ciencias

TOMO I

Complementos de álgebra
Las derivadas y sus aplicaciones

De uso para:
Ingenieros, alumnos-ingenieros,
Técnicos diversos, estudiantes

1966

PARANINFO

MADRID

Traducido por
CARLOS SAN ANTONIO MONSELL

© 1965 DUNOD

Depósito Legal: Z. 300.-1966

PARANINFO · Meléndez Valdés, 14 y 65 — MADRID (15)

Cometa, S. A. - León XIII, 24 - Zaragoza - 1966

PROLOGO

J. QUINET es un profesor al que aprecio desde hace treinta años. Le hubiera sido muy fácil el obtener para su obra de Matemáticas Superiores las frases elogiosas de un hombre del arte matemático, y en Francia existen hombres muy notables. Sin embargo, se ha contentado con un «usuario», con un hombre de los que no crean ni juzgan las matemáticas, pero que intentan servirse de ellas.

No estoy, pues, especialmente calificado para presentar la obra de un especialista, y si he aceptado a intervenir, es porque J. QUINET, Profesor de Matemáticas, comenzó siendo un Ingeniero Electricista y continuó siéndolo.

Esto explica la forma atractiva que ha sabido dar a exposiciones consideradas frecuentemente como áridas.

Sin abandonar la línea ni el rigor de la enseñanza clásica, que proporciona las alegrías más puras a aquellos (los hay) que aman las matemáticas, muestra, al mismo tiempo que expone el programa y no al final, para qué sirven las fórmulas del álgebra en la resolución de los problemas de física.

El estudiante, el futuro ingeniero, se da cuenta entonces de la necesidad de esta «herramienta» intelectual, sin la cual, a pesar de los dotes de intuición o de invención, no lograría franquear ciertos límites rápidamente alcanzados mediante ella.

Comprende que este prodigioso esfuerzo del pensamiento, realizado desde hace algunos siglos, no es la obra de un aficionado, útil solamente para amueblar el espíritu y pasar los exámenes, sino que es una de las bases fundamentales de su profesión.

La obra de J. QUINET, prevista para un curso de una Escuela de Radioelectricidad, está evidentemente orientada hacia los campos de aplicación eléctrica, y yo siento ahora, al leerla, el no haberla tenido en 1907, cuando preparaba solo, en provincias, el examen de la Escuela Superior de Electricidad, cuando extraía los conceptos ma-

temáticos de un enorme tratado de «Especiales», en el cual era completamente incapaz de hacer las selecciones necesarias.

J. QUINET no olvida, sin embargo, la mecánica matemática y construye cimientos para los que tienen mayores aspiraciones. Los estudios de las series, el desarrollo de FOURIER conducen, en efecto, a las proximidades del cálculo simbólico y no queda mucho camino a recorrer entre las soluciones presentadas para las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones de BESSEL.

Intencionadamente hago alusión a aquellas partes que entran ahora en la técnica del ingeniero de circuitos y de ondas centimétricas. Pero no se puede abarcar en un libro encuadrado dentro de las matemáticas elementales toda la estructura de los cálculos de la física moderna. J. QUINET nos conduce a los umbrales de estos campos. Nos da los medios para resolver la mayor parte de los problemas planteados al ingeniero y nos proporciona excelentes trampolines de partida.

Deseo que escriba nuevas obras en las que nos invite a incursiones hacia nuevos horizontes. Todos sus alumnos y amigos le seguirán con interés.

René BARTHÉLEMY,
Miembro de la Academia de Ciencias.

«En el campo de la ciencia, el azar favorece solamente a los espíritus que están preparados.»

PASTEUR

PREFACIO

Este libro se dirige a los ingenieros, estudiantes de ingeniería, técnicos o profesionales, y, de un modo general, a todos aquellos que desean aprender las Matemáticas Superiores.

—La experiencia adquirida desde hace treinta años en la enseñanza de matemáticas superiores, el contacto con un gran número de alumnos, así como las necesidades de la técnica industrial moderna, me han decidido a escribir esta obra con el único objeto de enseñar y explicar al lector el Cálculo Diferencial e Integral, así como la Geometría Analítica plana, que tantas aplicaciones tienen hoy día.

He aquí las características esenciales de esta obra:

1.° Primeramente queremos, ante todo, EXPLICAR Y HACER COMPRENDER;

2.° Daremos todos los detalles de los cálculos, tanto los cálculos teóricos como los cálculos de los ejemplos, con objeto de que el lector pueda, *al contrario de lo que ocurre en otros libros,* seguir los cálculos sin dificultad.

3.° La teoría será siempre expuesta por los métodos *más sencillos y más claros*, aunque haya que emplear procedimientos no habituales.

4.° *Tendremos siempre como meta la aplicación práctica*; por tanto dejaremos de lado las teorías interminables o los cálculos oscuros, nebulosos, incomprensibles, o de orden secundario, que abundan

tanto en los libros de matemáticas superiores. No olvidaremos que nosotros no escribimos para astrónomos o teóricos, que se pierden en las sutilidades... estratosféricas (!), sino para ingenieros o para futuros ingenieros, técnicos y estudiantes, que conocen las matemáticas elementales y quieren aprender y comprender las matemáticas superiores, *con objeto de aplicarlas.*

5.° Distinguiremos siempre, *lo cual no se hace jamás, lo esencial de lo que es secundario,* y, en los cláculos, no perderemos nuestro tiempo ni el tiempo del lector en calcular el enésimo decimal.

6.° Por fin, todo cálculo y toda teoría irán seguidos de ejemplos *explicados en detalle,* a los cuales añadiremos aplicaciones a la electricidad, mecánica, radio, etc.

Y éste no será el único atractivo de esta obra.

— Si alguien nos considera como deshonrados porque hemos dado todo el detalle de los cálculos o porque hemos sacrificado la elegancia de las demostraciones, despreciaremos esta crítica. Nosotros tenemos tan sólo un fin: *Hacer comprender al lector el cálculo diferencial e integral y darle un medio para pasar a las aplicaciones.*

Hemos querido ponernos al alcance de un gran número de alumnos y lectores que se desaniman con la lectura de ciertos libros oscuros de matemáticas, en los que no hay, por decirlo así, ningún ejemplo sobre las teorías expuestas, o bien donde los cálculos se escamotean, no se explica nada, y donde es imposible seguir los cálculos.

— Por fin, muy frecuentemente, se extienden sobre cosas de interés secundario, o bien inútiles (o que sólo servirán a los astrónomos o a los catedráticos de matemáticas), y donde no se exponen en detalle las cosas esenciales y las más útiles, las que sirven en la práctica *a los ingenieros y técnicos.*

— Por esto el lector desanimado dice: «Las matemáticas me repugnan y yo mando todo a paseo.»

— Pero este método de enseñanza está caducado y no será el que utilizaremos en esta obra.

— El lector debe comprender que, aunque haya ciertas teorías o cálculos que no tengan todavía aplicación, esto no significa que no tendrán aplicación jamás. Además, no debemos considerar sola y exclusivamente las aplicaciones prácticas; tiene importancia también el método de razonamiento, la formación del espíritu científico, el empleo de procedimientos ingeniosos, etc., y, desde este punto de

vista, el cálculo diferencial e integral es una mina maravillosa, que el lector debe utilizar.

— Veamos ahora el contenido de este **Curso elemental de Matemáticas superiores,** que corresponde al primero y segundo año de Matemáticas después del Bachillerato de Ciencias.

— Esta obra está dividida en 6 tomos, que se venden separadamente:

Tomo I. — *Complementos de álgebra* (determinantes, funciones exponenciales, logarítmicas e inversas).

Derivadas (cálculos y aplicaciones). Trazado de curvas. — Aplicaciones numerosas: en Optica, Electricidad, Mecánica, Radio, etc.

Tomo II. — *Desarrollos en serie* (fórmulas de TAYLOR y MAC-LAURIN). Las series.

El cálculo de complejos y sus aplicaciones matemáticas.

El cálculo diferencial (cálculo de las diferenciales y aplicaciones).

Las funciones de varias variables. Sus aplicaciones. — *Radios de curvatura* y aplicaciones.

Tomo III. — *Cálculo integral.* Estudio detallado de los principales métodos de integración. Numerosos ejemplos *explicados con detalle.*

Aplicaciones de las integrales a las superficies, volúmenes, longitudes, centros de gravedad, etc.

Las líneas trigonométricas hiperbólicas y sus aplicacioines.

Algunas aplicaciones eléctricas de las integrales.

Tomo IV. — Momentos de inercia.

Serie de Fourier, ejemplos de desarrollos.

Numerosas aplicaciones de las integrales a problemas.

Integrales curvilíneas. Integración de las diferenciales totales.

Integrales dobles y triples. Numerosos ejemplos y aplicaciones.

Tomo V. — *Ecuaciones diferenciales* de primero y segundo orden, *con 41 problemas de aplicaciones prácticas.* Sistemas de ecuaciones. Ecuaciones en derivadas parciales y aplicaciones.

Introducción al estudio del potencial y al estudio de los campos.

Tomo VI. — *Geometría analítica plana. Estudio de las cónicas y de un gran número de curvas.*

Ejemplos y aplicaciones físicas de las cónicas.

Trazado de curvas diversas, con numerosos ejemplos explicados con detalle.

— Las sugerencias de nuestros alumnos y antiguos alumnos, y nuestro contacto personal durante quince años con la industria eléctrica y radioeléctrica, así como el estudio de un gran número de libros de todas clases, nos han permitido hacer una «selección» en el inmenso programa de «Matemáticas Superiores», para elegir *lo que es útil actualmente y lo que tiene aplicaciones* o puede tenerlas, despreciando las matemáticas complicadas o de interés secundario.

— Este programa corresponde más o menos (salvo la Mecánica) al del curso «Matemáticas generales» de las Facultades y es el que explicamos en diferentes escuelas técnicas.

— Esta obra, que es, lo repetimos, un *Curso elemental de Matemáticas superiores,* no está al abrigo de las críticas, y aceptaremos todas las sugerencias sinceras y constructivas que se nos hagan; hemos tenido ya en cuenta diversas observaciones de nuestros lectores, que agradecemos aquí muy sinceramente.

— Hemos procurado escribir *un libro esencialmente pedagógico y moderno,* colocándonos en todo momento en el punto de vista del lector que intenta comprender y aplicar.

— Y como decíamos en nuestro libro *Teoría y Práctica de los circuitos electrónicos y de los amplificadores,* pedimos al lector que juzgue este libro, no sobre lo que le falta, sino sobre lo que contiene...

— Agradecemos vivamente al señor CHAUSSIN, profesor de la Escuela Normal Superior de la Enseñanza Técnica, y a los señores Giroux, Dieudé y Rousseau, ingenieros, que se han encargado de la tarea ingrata de la corrección de las pruebas y de la revisión de los cálculos.

— Agradecemos a la Editorial PARANINFO el cuidado con el que este libro ha sido editado, así como su perfecta presentación.

J. Q.

NOTA A LA TERCERA EDICION

En esta tercera edición, además de algunas correcciones en el texto, hemos aumentado el número de problemas prácticos consagrados a la búsqueda de máximos y mínimos, y hemos añadido, des-

de la segunda edición, al final del texto, una lista recapitulativa de las fórmulas del Tomo I, y 400 ejercicios o problemas a resolver. De este modo, el lector podrá ejercitarse y poner en práctica las teorías y las fórmulas del curso; esta aplicación práctica es primordial en un curso de matemáticas, obligando al alumno a hacer un trabajo personal de la mayor utilidad.

J. Q.

INDICE DE MATERIAS

PRÓLOGO ... ... *Pág.* 7

PREFACIO 9

CAPÍTULO PRIMERO

Fórmulas elementales de base

1. Geometría 19
2. Algebra 19
3. Trigonometría y curvas usuales 21
4. Algunos valores útiles 23
5. Letras del alfabeto griego ... ...

CAPÍTULO II

Complementos de álgebra superior

6. Cálculo de $(a + b)^m$. Triángulo de PASCAL 25
7. Nociones sencillas sobre los determinantes 27
8. Aplicación eléctrica 29
9. Caso de 3 ecuaciones con 3 incógnitas 30
10. Algunas propiedades de los determinantes. Teoremas fundamentales 33
11. Aplicaciones 37

CAPÍTULO III

Estudio de nuevas funciones

12. Preliminares sobre las funciones 41
13. Función exponencial 43
14. Algunas explicaciones auxiliares 45
15. Función logarítmica 47
16. Logaritmos neperianos 48
17. Curva de la función logarítmica 51
18. Relación entre los logaritmos neperianos y los logaritmos decimales 52
19. Otra forma de la función exponencial 53
20. Ejercicios sobre las exponenciales 54
21. Funciones trigonométricas inversas 55

CAPÍTULO IV

Las derivadas

22. Introducción ... 59
23. Preliminares al cálculo de las derivadas ... 60
24. Definición de la derivada de una función ... 63
25. Método general para calcular la derivada de una función ... 63
26. Cálculo de las derivadas de las funciones usuales ... 64
27. Significación geométrica de la derivada ... 70
28. Derivadas de las líneas trigonométricas fundamentales ... 74
29. Estudio de los límites ... 78

CAPÍTULO V

Cálculo de las derivadas de nuevas funciones

30. Derivada de la función exponencial ... 81
31. Derivada de la función logaritmica ... 82
32. Derivadas de las líneas trigonométricas inversas ... 84
33. Derivada de arc sen x ... 84
34. Derivada de arco cos x ... 85
35. Derivada de arc tg x ... 85
36. Derivada de una suma ... 86
37. Derivada de un producto ... 87
38. Derivada de un cociente ... 89

CAPÍTULO VI

Derivada de una función de función

39. Definición y fórmula general ... 93
40. Cuadro resumen de las derivadas fundamentales ... 98
41. Generalización de la derivada de una función de función ... 99
42. Derivadas sucesivas ... 103

CAPÍTULO VII

Aplicaciones de las derivadas.

43. Primera aplicación: Inclinación de una curva ... 107
44. Segunda aplicación: crecimiento o decrecimiento de una función. 110
45. Tercera aplicación: Encontrar los máximos y mínimos ... 111
46. Clave de la duda: ¿Máximo o mínimo? Primera regla ... 114
47. Segunda regla ... 119
48. Puntos de inflexión ... 123

Capítulo VIII

Examen de máximos y mínimos para aplicaciones prácticas

49. Problema de la caja ... 127
50. Problema de la cacerola y de la lata de conservas ... 128
51. Problema de la potencia eléctrica máxima ... 130
52. Problema de la reflexión de la luz ... 131
53. Problema de la refracción de la luz ... 133
54. Problema del navío ... 135
55. Problema del círculo ... 136
56. Problema de la estatua ... 137
57. Problema del autobús ... 138
58. Problema del transformador eléctrico ... 140
59. Problema del proyectil ... 142
60. Problema de la resonancia eléctrica ... 144
61. Problema de la inducción magnética ... 145
62. Problema del jardinero ... 146
63. Problema del corredor ... 147
64. Problema del agrupamiento óptico de generadores eléctricos ... 148
65. Problema del puente de Wheatstone ... 149
66. Problema sobre el rendimiento de un transformador eléctrico ... 152
67. Problema del condensador con una resistecnia en paralelo ... 154
68. Problema de la línea telefónica ... 156
69. Problema del transformador de alta frecuencia en Radio ... 158
70. Problema de la selectividad de un circuito de sintonía en Radio. 161

Capítulo IX

Estudio de la variación de las funciones. Trazado de curvas

71. Marcha a seguir ... 165
72. Ejemplos de trazado de curvas ... 167
73. Curvas de las funciones nuevas: exponencial, logarítmica, arc sen x, arc cos x y arc tg x ... 181
74. Curvas cualesquiera ... 185

Capítulo X

Otras derivadas

75. Derivadas de las funciones implícitas ... 199
76. Derivada segunda de una función implícita ... 200
77. Derivadas de las funciones paramétricas ... 201
78. Derivada segunda de una función paramétrica ... 203
79. Derivadas logarítmicas ... 204
80. Otra aplicación de la derivada logarítmica ... 206
81. Derivada de las funcioses compuestas ... 208
82. Ejemplos ... 210

83. Generalización 212
84. Otro procedimiento para calcular la derivada de una función implícita 213
85. Observación final y sumario del Tomo II 215

LISTA RECAPITULATIVA DE LAS FÓRMULAS DEL TOMO I 217

400 EJERCICIOS Y PROBLEMAS A RESOLVER 223

CAPITULO PRIMERO

FORMULAS ELEMENTALES BASICAS

1. Geometría. — Superficie de un triángulo $= \frac{1}{2} b \cdot h$.

Area de un círculo $= \pi R^2$ o bien $\frac{\pi D^2}{4}$.

Longitud de la circunferencia $= \pi D$ o bien $2\pi R$.

Volumen de un cilindro recto $= \pi R^2 H$.

Area lateral de un cilindro recto $= 2\pi RH$.

Volumen del cono recto $= \frac{1}{3} \pi R^2 H$.

Volumen de la esfera $= \frac{4}{3} \pi R^3$

Superficie de la esfera $= 4\pi R^2$.

2. Algebra. — Ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$.

1.° Si $b^2 - 4ac > 0$, dos raíces reales:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2.° Si $b^2 - 4ac = 0$, una sola raíz: $x = -\frac{b}{2a}$.

3.° Si $b^2 - 4ac < 0$, no existen raíces reales.

Si existen dos raíces, tenemos:

Producto: $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$ Suma: $x' = x'' = -\frac{b}{a}$.

Trinomio de segundo grado:

$$y = a^2 + bx + c \quad \text{o bien} \quad a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$
$$= a(x - x')(x - x'').$$

Máximo o mínimo de $y = ax^2 + bx + c$:

Si $a > 0$, y pasa por un mínimo.

Si $a < 0$, y pasa por un máximo.

y, en los dos casos, esto tiene lugar para $x = -\frac{b}{2a}$.

El valor del máximo o del mínimo de y es:

$$-\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \quad \text{o bien} \quad -\frac{\Delta}{2a}.$$

Signo del trinomio:

1.° a es > 0 {
- $\Delta > 0$ — y es negativo entre las raíces y > 0 en el exterior,
- $\Delta = 0$ — y es siempre > 0, salvo para $x = -\frac{b}{2a}$ donde y es nulo,
- $\Delta < 0$ — y es siempre > 0,

2.° a es < 0 {
- $\Delta > 0$ — y es positivo entre las raíces y negativo en el exterior,
- $\Delta = 0$ — y es siempre < 0, salvo para $x = -\frac{b}{2a}$, donde y es nulo,
- $\Delta < 0$ — y es siempre < 0.

Progresiones. — Sea a el valor del primer término y r la razón:

1.° Aritméticas {
- el valor del término enésimo es: $l = a + (n - 1)r$
- la suma de los n primeros términos es: $S = \frac{n}{2}(a + l)$,

2.° Geométricas {
- el valor del término enésimo es: $l = a \cdot r^{n-1}$
- la suma de los n primeros términos es: $S = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$.

Caso particular: Si $r < 1$, la suma de un número infinito de términos es:

$$S = \frac{a}{1 - r}.$$

Logaritmos:

$$\log (a \cdot b) = \log a + \log b$$

$$\log \left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a \qquad \log \frac{1}{a} = -\log a$$

$$\log a^n = n \cdot \log a \qquad \log 1 = 0.$$

Identidades notables:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

3. Trigonometría.

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

$$\operatorname{sen} x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} (\pi - x)$$

$$\cos x = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \cos x = -\cos (\pi - x)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \qquad \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} (\pi - x)$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

Haciendo $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = t$ tenemos:

$$\operatorname{sen} a = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Proyección de un vector de longitud L sobre un eje: $l = \mathrm{L} \cdot \cos \alpha$.

Fórmulas de transformación:

$$\cos p + \cos r = 2 \cos \left(\frac{p+r}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{p-r}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos r = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{p+r}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{p-r}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} r = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{p+r}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{p-r}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} r = 2 \cos \left(\frac{p+r}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{p-r}{2}\right).$$

En un triángulo cualquiera tenemos:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C} \qquad \text{con} \qquad A + B + C = 180^\circ \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A. \end{array}\right.$$

En un triángulo rectángulo, si a es la hipotenusa: $a^2 = b^2 + c^2$.

Intensidad útil:

$$a \cdot \operatorname{sen} x + b \cdot \cos x \equiv M \cdot \operatorname{sen} (x - \varphi) \qquad \text{con} \left\{\begin{array}{l} M = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = -\dfrac{b}{a}. \end{array}\right.$$

4. Algunos valores útiles:

ángulo de 45° o bien $\dfrac{\pi}{4}$ $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707 \\ \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \end{array}\right.$

ángulo de 30° o bien $\dfrac{\pi}{6}$ $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{1}{2} \\ \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866 \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577 \end{array}\right.$

ángulo de 60° o bien $\dfrac{\pi}{3}$ $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866 \\ \cos 60^\circ = 0{,}5 \\ \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} = 1{,}732. \end{array}\right.$

OBSERVACIÓN. — De 0° hasta 10°, se puede prácticamente igualar el seno a la tangente:

Angulos	5°	10°	15°
Senos	0,08716	0,17365	0,25882
Tangentes	0,08749	0,17633	0,26795

Ecuaciones de algunas curvas:

Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 = R^2$

Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ecuación de la hipérbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

} El centro está en el origen de coordenadas

Ecuación de la parábola: $y^2 = 2px$ (eje horizontal)

Ecuación de una recta que pasa por el origen:

$$y = a \cdot x$$

recta cualquiera:

$$y = a \cdot x + b \qquad (a = \operatorname{tg} \alpha)$$

o bien:

$$Ax + By = C.$$

5. Algunas letras del alfabeto griego:

Letras		Nombre	Letras		Nombre
A	α	alfa	M	μ	mu
B	β	beta	N	ν	nu
Γ	γ	gamma	Π	π, ϖ	pi
Δ	δ	delta	P	ρ	ro
E	ε	épsilon	Σ	σ	sigma
H	η	eta	Φ	φ	fi
Θ	θ	theta	Ψ	ψ	psi
Λ	λ	lambda	Ω	ω	omega

CAPITULO II

COMPLEMENTOS DE ALGEBRA SUPERIOR

Antes de comenzar el estudio de las derivadas, debemos dar algunos complementos del álgebra elemental, tratando, bien los procedimientos de cálculo, o bien el estudio de nuevas funciones.

— Debemos indicar al lector, desde el principio, que todo lo que estudiaremos en estas páginas será útil después, y es, por tanto, necesario estudiarlas.

6. Cálculo de $(a + b)^m$. Triángulo de Pascal. — Veremos en el Tomo II (§ 4), de un modo muy sencillo, la fórmula general del binomio de NEWTON que permite hacer directamente el cálculo.

Sin embargo, es indispensable conocer, *desde ahora,* un procedimiento mecánico sencillo, descubierto por PASCAL, para calcular $(a + b)^m$, donde m es un número entero y positivo.

— Algunas observaciones. Sabemos que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Vemos que el desarrollo consta de $(m + 1)$ términos: 3 para el cuadrado, 4 para el cubo, etc.

— Se nos pide dos cosas: Encontrar los exponentes de las letras, y encontrar los coeficientes numéricos de cada término.

En cuanto a los exponentes de las letras, observaremos que *los exponentes de a comienzan por m y disminuyen en una unidad al ir de izquierda hacia derecha*: por ejemplo el cubo: a^3 a^2 a^1 a^0 $(= 1)$; por el contrario, los exponentes de b, van aumentando en una unidad:

$$b^0(= 1) \quad b^1 \quad b^2 \quad b^3.$$

Todos los términos son de grado m:

En el cuadrado, tanto a^2 como ab y b^2 son de grado 2.

En el cubo, a^3 es de grado 3, a^2b es igualmente de grado $(2 + 1)$, ab^2 es de grado $(1 + 2)$, y lo mismo ocurre con b^3.

Generalizando, podremos decir que todos los términos de $(a + b)^4$ serán de grado 4:

$$a^4 \quad a^3b \quad a^2b^2 \quad ab^3 \quad b^4$$

los términos de $(a + b)^5$ serán de grado 5:

$$a^5 \quad a^4b \quad a^3b^2 \quad a^2b^3 \quad ab^4 \quad b^5.$$

Nos falta calcular los coeficientes numéricos de cada término. Para esto se emplea *el triángulo de* PASCAL. La primera columna consta solamente de la cifra 1, la segunda columna contiene los números enteros sucesivos (un rango cualquiera dentro de esta columna representa el número m); todas las columnas comienzan por la unidad, descendiendo una línea cada vez:

	1							
	1	1						
Coeficientes del cuadrado →	1	**2**	1					
Coeficientes del cubo →	1	**3**	3	1				
Coeficientes de la potencia 4 →	1	**4**	6	4	1			
Coeficientes de la potencia 5 →	1	**5**	10	10	5	1		
Coeficientes de la potencia 6 →	1	**6**	15	20	15	6	1	
Coeficientes de la potencia 7 →	1	**7**	21	35	35	21	7	1
Coeficientes de la potencia 8 →	1	**8**	28	56	70	56	28	8	1.

Para calcular una cifra de este triángulo, se observará que *esta cifra es igual a la suma de la cifra que está encima de ella, y de la cifra que está a la izquierda de esta última.* Por ejemplo:

$$10 = 6 + 4 \qquad 7 = 1 + 6$$
$$5 = 1 + 4 \qquad 56 = 21 + 35$$
$$21 = 15 + 6 \qquad \text{etc.}$$

Tendremos, resumiendo:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Cálculo de $(a - b)^m$. — Se opera del mismo modo, salvo que, según recordaremos, la potencia *impar* de un número negativo es negativa. Por tanto, cuando b tenga un exponente impar, el signo de este término será el signo menos, lo cual nos da:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4, \quad \text{etc.}$$

Observamos que los signos son alternativamente positivos y negativos.

Veremos más adelante, en los desarrollos en serie (Tomo II), la fórmula del binomio de NEWTON, que permite calcular $(a + b)^m$, cualquiera que sea m: positivo, negativo, entero o fraccionario.

NOCIONES SENCILLAS SOBRE LOS DETERMINANTES

7. — Los determinantes proporcionan un método *muy sencillo y muy rápido* para resolver n ecuaciones con n incógnitas.

Pero como en la práctica aparecen frecuentemente dos ecuaciones con dos incógnitas, o bien tres ecuaciones con tres incógnitas, nos limitaremos a estos dos casos, y, aunque daremos algunas reglas y detalles suplementarios, no trataremos completamente la teoría general de los determinantes, que sólo puede hacerse en un estudio más avanzado de Matemáticas superiores. Además, el interés *práctico* de este estudio completo es muy reducido desde el punto de vista práctico.

Caso de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas x y z. Escribamos *en primer lugar,* las ecuaciones en la forma siguiente: Los términos en x uno debajo del otro, los dos términos en z uno debajo del otro, después del signo igual y, por fin, los dos términos constantes uno debajo del otro:

$$a \cdot x + b \cdot z = c$$
$$a' \cdot x + b' \cdot z = c'.$$

Veamos cómo se resolvería el sistema de ecuaciones por el método de sustitución. La primera ecuación nos da:

$$x = \frac{c - bz}{a}$$

de donde:

$$a' \left(\frac{c - bz}{a}\right) + b'z = c'$$

$$a'(c - bz) + ab'z = ac'$$

$$z(ab' - ba') = ac' - ca'$$

$$z = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Sustituyendo este valor de z en x:

$$x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\left(\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}\right)$$

$$= \frac{c(ab' - ba') - b(ac' - ca')}{a(ab' - ba')}$$

$$= \frac{cab' - bac'}{a(ab' - ba')} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Observemos que x y z tienen el mismo denominador $ab' - ba'$. Llamaremos a esta cantidad *determinante de segundo orden* y lo representaremos por el símbolo:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

Se forma escribiendo los coeficientes de x y z en la misma posición... geográfica que ocupan en las dos ecuaciones.

— Para calcular este determinante, se efectúa la diferencia de los productos en cruz, comenzando por a:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'.$$

Los numeradores de x y de z son también determinantes, que calcularemos del modo siguiente:

para x: $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc'$; para z: $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca'$.

Para escribir estos dos determinantes, se observa que:

para el determinante de x, se sustituye, en el determinante del denominador, los coeficientes de esta incógnita por los términos constantes c y c',

para el determinante de z, se sustituye, en el determinante del denominador, los coeficientes de esta incógnita por los términos constantes c y c'.

— Tendremos, finalmente:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

La regla anterior indica que hay que *restar* el segundo producto del primero, teniendo en cuenta que todos estos coeficientes hay que tomarlos con sus signos y *que hay que aplicar después la regla de los signos.*

Naturalmente, se comienza por escribir *primero* el determinante del denominador que es el que sirve de base para escribir los otros.

Ventajas de este procedimiento:

1.° Es muy rápido.

2.° Permite elegir la incógnita que se quiera, *sin perder tiempo calculando la otra,* en el caso bastante general en que nos interese tan sólo una incógnita.

3.° Si uno de los coeficientes es nulo, el cálculo se simplifica.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x + 3z &= 13 \\ 5x - 4z &= -2. \end{aligned}$$

Tenemos inmediatamente:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{13(-4) - 3(-2)}{2(-4) - 5 \cdot 3} = \frac{-52 + 6}{-8 - 15} = +2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} & D & \end{vmatrix}} = \frac{2(-2) - 5 \cdot 13}{-8 - 15} = \frac{-4 - 65}{-23} = +3.$$

8. Aplicación eléctrica. — 1.° Tenemos dos resistencias en paralelo R_1 y R_2. Conociendo la corriente exterior I, se pide calcular las intensidades de las corrientes I_1 e I_2 en cada resistencia (fig. 1).

Tenemos:

$$I_1 + I_2 = I$$

e igualando las diferencias de potencial V, en las bornas de cada resistencia:

$$V = R_1 I_1 = R_2 I_2,$$

lo cual nos da el sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \\ I_1 + I_2 = I. \end{vmatrix}$$

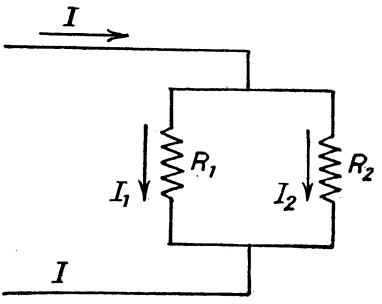

FIG. 1

De donde deducimos inmediatamente:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -R_2 \\ I & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 & -R_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0 + R_2 I}{R_1 - (-R_2)} = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 & 0 \\ 1 & I \end{vmatrix}}{D} = \frac{R_1 I - 0}{R_1 + R_2} = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

2.° Del mismo modo, sean dos condensadores de capacidades C_1 y C_2 en serie, conectados a una diferencia de potencial exterior V, continua. Se pide calcular las diferencias de potencial parciales V_1 y V_2, en las bornas de cada condensador, cuando éstos estén cargados.

Sabemos que los condensadores conectados en serie adquieren la misma carga Q, por tanto:

$$Q = C_1 V_1 = C_2 V_2,$$

además:

$$V_1 + V_2 = V.$$

Tendremos entonces el sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1 V_1 - C_2 V_2 = 0 \\ V_1 + V_2 = V \end{cases}$$

que se resolvería, como anteriormente, calculándose V_1 y V_2:

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -C_2 \\ V & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1 & -C_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0 - (-C_2 V)}{C_1 + C_2} = V \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & 0 \\ 1 & V \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1 & -C_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{C_1 V - 0}{C_1 + C_2} = V \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

9. Caso de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas x, z, t. — Después de quitar denominadores y reducir los términos semejantes, si es necesario, escribiremos las tres ecuaciones en la forma simétrica siguiente: Las x debajo de las x, las z debajo de las

z, las t debajo de las t, después el signo *igual* y, finalmente, los términos constantes unos debajo de otros:

$$a \cdot x + b \cdot z + c \cdot t = d$$
$$a' \cdot x + b' \cdot z + c' \cdot t = d'$$
$$a'' \cdot x + b'' \cdot z + c'' \cdot t = d''.$$

Naturalmente, si alguna de las incógnitas falta en una de las ecuaciones, se deja su posición en blanco (es decir, que se considera el coeficiente de esta incógnita como nulo).

— *Escribiremos* en primer lugar el determinante y después indicaremos cómo se hace el cálculo práctico. La demostración la haremos después.

— *Las tres incógnitas x, z y t tienen por denominador un determinante de tercer grado*, es decir con 3 columnas y 3 filas, en el cual aparecen los coeficientes colocados en la misma posición geográfica que ocupan en las tres ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Para calcular este determinante, primero se efectúa la suma de los productos de *tres* letras en el sentido ↘, después se resta la suma de los productos de tres letras en el sentido ↙, lo cual se indica simbólicamente en la figura 2:

$$= ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - cb'a'' - ba'c'' - ac'b''.$$

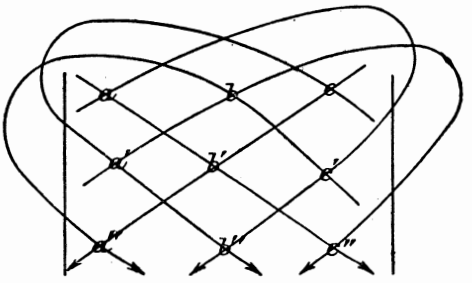

FIG. 2

Observaremos que, si algunos coeficientes son nulos, los cálculos se simplifican mucho.

Numerador de x: Como x es la primera incógnita correspondiente a la primera columna, se reemplaza en el determinante del denominador anterior la primera columna por los términos constantes $d\ d'\ d''$; las otras dos columnas no se cambian:

$$\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

en el cual, el cálculo de su valor se hace como hemos indicado.

Numerador de z: Siendo z la segunda incógnita que corresponde a la segunda columna, se reemplaza en el denominador la segunda columna por los términos constantes $d\,d'\,d''$, no cambiando las otras dos columnas:

$$\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Numerador de t: Puesto que t es la tercera incógnita que corresponde a la tercera columna, se reemplaza en el denominador la tercera columna por los términos constantes $d\,d'\,d''$, mientras que las otras dos columnas no cambian:

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}.$$

Se tendrá, pues, finalmente:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}} = \frac{db'c'' + bc'd'' + cd'b'' - cb'd'' - bd'c'' - dc'b''}{ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - cb'a'' - ba'c'' - ac'b''}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} & D & \end{vmatrix}} = \frac{ad'c'' + dc'a'' + ca'd'' - cd'a'' - da'c'' - ac'd''}{D}$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} & D & \end{vmatrix}} = \frac{ab'd'' + bd'a'' + da'b'' - db'a'' - ba'd'' - ad'b''}{D}$$

Todos los coeficientes deben ser tomados con sus signos.

La regla consiste en poner el signo menos allí donde este signo está escrito, pero, si uno de los triples productos es negativo, dicho signo menos se convertirá en más.

En general no habrá necesidad de conocer las tres incógnitas, eligiéndose aquella que interese en cada caso.

Ejemplo. — Resolver el sistema:

$$\left|\begin{array}{l} 2x + 3z - 4t = -3 \\ 4x + 2z \quad\quad = 14 \\ 4x \quad\quad - 2t = 0. \end{array}\right.$$

El denominador de las tres incógnitas será:

$$\left|\begin{array}{rrr} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{array}\right| = 2\cdot 2(-2) + 0 + 0 - 4\cdot 2(-4) - 3\cdot 4(-2) - 0$$
$$= -8 + 32 + 24 = +48.$$

Y se tendrá:

$$x = \frac{\left|\begin{array}{rrr} -3 & 3 & -4 \\ 14 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right|}{48} = \frac{-3\cdot 2(-2) + 0 + 0 - 0 - 0 - 3(14)(-2)}{48}$$
$$= \frac{96}{48} = +2.$$

$$z = \frac{\left|\begin{array}{rrr} 2 & -3 & -4 \\ 4 & 14 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{array}\right|}{48} = \frac{2\cdot 14(-2) + 0 + 0 - 4\cdot 14(-4) - 0 - 4(-3)(-2)}{48}$$
$$= \frac{144}{48} = +3.$$

$$t = \frac{\left|\begin{array}{rrr} 2 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 14 \\ 4 & 0 & 0 \end{array}\right|}{48} = \frac{0 + 0 + 3\cdot 14\cdot 4 - 4\cdot 2(-3) - 0 - 0}{48}$$
$$= \frac{192}{48} = +4.$$

NOTA IMPORTANTE. — Por ser más rápido y haber menos peligro de error, es preferible prácticamente reducirse, en primer lugar, a dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de sustitución, y después aplicar el determinante a estas dos ecuaciones.

10. Algunas propiedades de los determinantes (*este fin de capítulo puede ser omitido en un primer estudio*). — Vamos a estudiar ahora algunas propiedades fundamentales de los determinantes, refiriéndonos sobre todo a los de tercer orden; esto nos permitirá demostrar la precedente regla de cálculo.

Sea el determinante de tercer orden con nueve cantidades:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

DEFINICIÓN : Llámese determinante menor, relativo a una de estas cantidades, al determinante de segundo orden de las cantidades que quedan cuando se suprime la fila y la columna de la letra considerada.

Así, el determinante menor de a es:

$$\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} = b'c'' - c'b''$$

el de a' es $\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} = bc'' - cb''$

el de a'' es $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = bc' - cb'$

el de b es $\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} = a'c'' - c'a''$, etc.

El determinante menor relativo a una letra o a una cantidad se designa por la misma letra escrita en mayúscula:

$$\text{A} = \text{menor de } a = b'c'' - c'b''$$
$$\text{B} = \text{menor de } b = a'c'' - c'a'' \quad \text{etc.}$$

Conocidos los menores, el valor del determinante de tercer orden es *una cualquiera* de las seis expresiones siguientes, que son equivalentes (ver fórmula 1):

$$+ a\text{A} - b\text{B} + c\text{C} \qquad (2)$$

o bien $\quad - a'\text{A}' + b'\text{B}' - c'\text{C}'$

o bien $\quad + a''\text{A}'' - b''\text{B}'' + c''\text{C}''$

o también

$$+ a\text{A} - a'\text{A}' + a''\text{A}'' \qquad (3)$$

o $\quad - b\text{B} + b'\text{B}' - b''\text{B}''$

o $\quad + c\text{C} - c'\text{C}' + c''\text{C}''.$

siendo la fórmula (2) la que se utilizará corrientemente.

Por ejemplo, verifiquemos la equivalencia de la segunda y de la sexta. La segunda se escribe

$$-a'(bc'' - cb'') + b'(ac'' - ca'') - c'\text{C}'$$

y la segunda se escribe

$$c(a'b'' - b'a'') - c'C' + c''(ab' - ba').$$

Pues bien, desarrollando se ve que son iguales.

Examinemos ahora los teoremas fundamentales.

TEOREMA I. — *Si se multiplica por K todos los términos de una fila o de una columna, el determinante queda multiplicado por K.*

Sea

$$\begin{matrix} Ka & b & c \\ Ka' & b' & c' \\ Ka'' & b'' & c''. \end{matrix}$$

Desarrollémosle con relación a la primera columna aplicando la fórmula (3):

$$Ka \cdot A - Ka' \cdot A' + Ka'' \cdot A'' = K(aA - a'A' + a''A') = K \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

como queríamos demostrar. c.q.d.

TEOREMA II. — *Si, en un determinante, los elementos de una fila (o de una columna) son respectivamente iguales a los de otra fila (u otra columna) multiplicados por una constante K, el determinante es nulo. Lo mismo ocurre cuando dos filas, o dos columnas, son iguales.*

En efecto, sea

$$\begin{vmatrix} a & Ka & c \\ a' & Ka' & c' \\ a'' & Ka'' & c'' \end{vmatrix} = \Delta,$$

más arriba se ha visto que es igual a

$$K \begin{vmatrix} a & a & c \\ a' & a' & c' \\ a'' & a'' & c'' \end{vmatrix} = K \cdot \Delta.$$

por tanto, desarrollándole con relación a los elementos de la última columna:

$$= K[c(a'a'' - a'a'') - c'(aa'' - aa'') + c''(aa' - aa')]$$
$$= 0. \qquad \text{c.q.d.}$$

TEOREMA III. — *Si, en un determinante, los elementos de una fila o de una columna son todos la suma de* 2, 3, 4... *términos, el determinante es entonces la suma de* 2, 3, 4... *determinantes obtenidos como sigue:*

Sea

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \Delta$$

tal que

$$\begin{aligned} b &= b_1 + b_2 \\ b' &= b_1' + b_2' \\ b'' &= b_1'' + b_2'' \end{aligned}$$

el determinante inicial será la suma de los determinantes siguientes:

$$\begin{vmatrix} a & b_1 & c \\ a' & b_1' & c' \\ a'' & b_1'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b_2 & c \\ a' & b_2' & c' \\ a'' & b_2'' & c'' \end{vmatrix}.$$

En efecto, desarrollemos el primer Δ según los elementos de la columna intermedia:

$$\begin{aligned} -bB + b'B' - b''B'' &= -B(b_1 + b_2) + B'(b_1' + b_2') - B''(b_1'' + b_2'') \\ &= (-b_1B + b_1'B' - b_1''B'') + (-b_2B + b_2'B' - b_2''B''). \end{aligned}$$

por tanto, el primer paréntesis es el primero de nuestros dos determinantes, y el segundo es el segundo determinante, desarrollado cada uno con relación a la segunda columna. Queda, pues, demostrado el teorema.

c.q.d.

TEOREMA IV. — *Si se invierte los términos de dos filas o de dos columnas, el determinante toma un valor opuesto.*

En efecto, sea

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Comparémosle con el siguiente

$$\begin{vmatrix} c & b & a \\ c' & b' & a' \\ c'' & b'' & a'' \end{vmatrix}$$

y desarrollémosles con relación a la columna intermedia:

para el primero

$$-b(a'c''-c'a'')+\ldots$$

para el segundo

$$-b(c'a''-a'c'')+\ldots$$

se ve que los menores han cambiado de signo. c.q.d.

NOTA. — Este teorema nos permite deducir el II ya enunciado: *todo determinante que tiene dos líneas idénticas es nulo.* En efecto, si se permuta estas dos líneas, por una parte cambia de signo según lo anterior, pero sin embargo no lo hace porque las líneas no cambian:

$$\Delta = -\Delta$$

por tanto

$$\Delta = 0.$$

11. Aplicaciones. Resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Sean las tres ecuaciones escritas bajo la forma simétrica

$$\begin{aligned} ax &+ bz + ct = d \\ a'x &+ b'z + c't = d' \\ a''x &+ b''z + c''t = d''. \end{aligned}$$

Se llama determinante de los coeficientes de las incógnitas al siguiente determinante de tercer orden:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

A partir de ahora, las expresiones A A' A''... serán siempre los menores del determinante precedente.

Tomemos nuestras tres ecuaciones, multipliquemos la primera por + A, la segunda por — A' y la tercera por A'' y sumemos las tres expresiones obtenidas:

$$\begin{aligned} x(Aa - A'a' + A''a'') + z(bA - b'A' + b''A'') \\ + t(cA - c'A' + c''A'') = dA - d'A' + d''A''. \end{aligned}$$

El coeficiente de x es justamente el desarrollo del determinante Δ; el de z se obtiene, partiendo del primero, reemplazando en la primera columna las a por las b sin tocar las otras, *siendo, pues, nulo*; lo mismo para el coeficiente de t.

En cuanto al segundo miembro, se obtiene mediante Δ reemplazando los términos de la primera columna (que corresponde a las x) por los términos constantes $d\ d'\ d''$; llamémosle Δ_1.

— Queda entonces

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

De la misma forma, para calcular z se seguiría la misma marcha multiplicando nuestras tres ecuaciones: la primera por — B, la segunda por + B′, y la tercera por — B″, y sumando después. Se encuentra entonces

$$z = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

donde Δ_2 es el determinante Δ en el cual la segunda columna (que corresponde a las z) ha sido reemplazada por los términos constantes $d\ d'\ d''$.

Del mismo modo se encontraría

$$t = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

donde Δ_3 es el determinante Δ en el cual la tercera columna (que corresponde a las t) ha sido reemplazada por los términos constantes.

— Se vuelve a encontrar así la regla empírica que ha sido indicada al principio para resolver tres ecuaciones con tres incógnitas.

Simplificaciones. — Cuando ciertos coeficientes son nulos, los cálculos se simplifican. También se busca reemplazar un determinante dado por otro que tenga coeficientes nulos, aplicando la siguiente regla:

REGLA. — *El valor de un determinante no cambia añadiendo a los términos de una fila (o de una columna) los de otra fila (u otra columna)* multiplicados por K.

Sea $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$.

Se tendrá

$$\begin{vmatrix} a + Kc & b & c \\ a' + Kc' & b' & c' \\ a'' + Kc'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Kc & b & c \\ Kc' & b' & c' \\ Kc'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

por tanto, siendo nulo este último determinante, el determinante inicial no ha cambiado.

Ejemplo I. — Sea

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix}.$$

Añadamos la segunda fila a la primera:

$$\begin{vmatrix} 15 & 6 & 0 \\ 8 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix}.$$

Análogamente, añadamos a la tercera fila la segunda multiplicada por 6:

$$\begin{vmatrix} 15 & 6 & 0 \\ 8 & 2 & -1 \\ 52 & 19 & 0 \end{vmatrix}$$

cuyo valor es:

$$\Delta = 0 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 52 & 19 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 15 & 6 \\ 52 & 19 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 15 & 6 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)(15 \cdot 19 - 6 \cdot 52) = -27.$$

EJEMPLO II. — Volvamos a tomar el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que hemos resuelto al principio de este capítulo

$$\begin{aligned} 2x + 3z - 4t &= -3 \\ 4x + 2z \quad\ &= 14 \\ 4x \quad\ - 2t &= 0 \end{aligned}$$

y vamos a resolverle sirviéndonos de los menores.

Calculemos primero el denominador de las incógnitas

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -4(-8) - 0 - 2(4 - 12) = +48.$$

Se tendrá, pues, resolviendo con relación a la última fila:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 & -4 \\ 14 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{0 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 14 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 14 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$= \frac{-2(-6 - 42)}{48} = +2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 4 & 14 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{4\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 14 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 14 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$= \frac{4(+56) - 2(28 + 12)}{48} = +3$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 14 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{4\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$= \frac{4(42 + 6)}{48} = +4.$$

Se desarrolla los determinantes de los numeradores de x, z y t con relación a una fila o columna cualquiera, de preferencia la que tiene el mayor número de ceros. Aquí nosotros lo hemos hecho con relación a la última fila, que es

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & -2 & \text{para } x \\ 4 & 0 & -2 & \text{para } z \\ 4 & 0 & 0 & \text{para } t. \end{array}$$

Con un poco de práctica este procedimiento de los menores es, evidentemente, bastante más rápido que la regla indicada al principio del capítulo.

CAPITULO III

ESTUDIO DE LAS NUEVAS FUNCIONES

12. Preliminares sobre las funciones. — Recordemos rápidamente el concepto de función.

— Se dice que una cantidad y es función de una variable x, y se escribe

$$y = f(x)$$

cuando y depende de x; es decir, que y está ligada a x por una relación algebraica, más o menos complicada, conocida o desconocida.

— Por ejemplo, el gasto de energía eléctrica consumido por una lámpara es función del tiempo de iluminación; igualmente el peso de un cuerpo es función de su volumen, la intensidad de una corriente eléctrica en un circuito es función de la resistencia de este circuito, etcétera.

Así pues, en matemáticas elementales se ha utilizado ya un cierto número de funciones, cuyas variaciones están representadas por curvas tales como:

$$y = ax + b \qquad y = \operatorname{sen} x$$

$$y = \frac{1}{x} \qquad y = \operatorname{tg} x$$

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \text{etc.}$$

Pero nosotros tenemos que estudiar ahora nuevas funciones que, enseguida, nos serán muy útiles.

— Estudiemos primero la función $y = ax^m$ (con m entero) y veamos cómo varía su crecimiento cuando m aumenta cada vez más. Para ello, superpongamos todas estas curvas sobre el mismo gráfico (fig. 3).

Para $m = 1$ $\qquad y = a \cdot x$

$x = 0$	$y = 0$
$x = \frac{1}{2}$	$y = \frac{a}{2}$
$x = 1$	$y = a$
$x = 2$	$y = 2a$

es una recta que pasa por el origen.

Para $m = 2$	$y = ax^2$	para	$x = 0$	$y = 0$
			$x = \frac{1}{2}$	$y = \frac{a}{4}$
			$x = 1$	$y = a$
			$x = 2$	$y = 4a$
Para $m = 3$	$y = ax^3$	para	$x = 0$	$y = 0$
			$x = \frac{1}{2}$	$y = \frac{a}{8}$
			$x = 1$	$y = a$
			$x = 2$	$y = 8a$, etc.

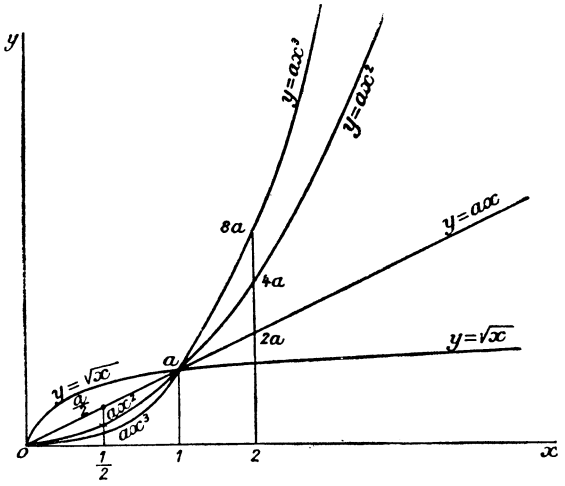

FIG. 3

De aquí se deduce entonces los dos resultados siguientes muy importantes, que indican cómo varía y:

1.° Cuando $x < 1$ la función varía tanto *más lentamente* cuanto mayor es m.

2.° Cuando $x > 1$ la función varía tanto *más deprisa* cuanto mayor es m.

Se ve que, por poco grande que sea m, la función y crece *muy rápidamente*.

Pero, para crecimientos aún más rápidos, se hace necesario considerar la función exponencial, donde la variable está en el exponente.

NOTA: Si $m > 1$ las curvas están por encima de la recta $y = ax$ para valores de $x > 1$; pero si $m < 1$, por ejempol $m = \frac{1}{2}$, las curvas están por debajo de la recta.

13. Función exponencial $\boxed{y = a^x}$.

La variable está aquí en el exponente y a es un número cualquiera $>$ ó < 1, pero positivo.

Estudiemos someramente sus variaciones, ya que el estudio completo no podrá ser hecho hasta más tarde con la ayuda de las derivadas.

Primer caso: $a > 1$.

para	$x = -\infty$	$y = a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = 0$
»	$x = 0$	$y = a^0 = 1$
»	$x = 1$	$y = a$
»	$x = 2$	$y = a^2$
»	$x = 3$	$y = a^3$
»	$x = +\infty$	$y = a^{\infty} = +\infty$.

Consideremos, pues, la función

$$y = a^x.$$

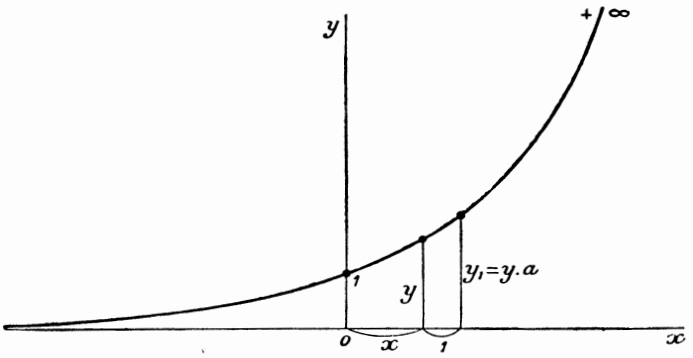

FIG. 4

Demos a x un incremento unidad. El nuevo valor de y es

$$y_1 = a^{x+1} = a^x \cdot a$$

es decir

$$y_1 = y \cdot a$$

Así, la ordenada se hace a veces más grande cada vez que x aumenta en una unidad. *Se ve que, por poco grande que sea a, y aumenta con una rapidez fantástica* (fig. 4). Más tarde veremos que no hay ni máximo ni mínimo, y que a^x crece indefinidamente.

— Se ve también que y es *siempre positivo* cualesquiera que sean el signo y el valor de x.

Segundo caso: $a < 1$.

Si a está comprendido entre 0 y 1, es fácil ver que la función es constantemente decreciente:

$$\text{para} \quad x = -\infty \qquad y = a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} \qquad \text{que} \quad \to +\infty$$

$$x = 0 \qquad y = a^0 = 1$$

$$x = +\infty \qquad y = a^{\infty} \qquad \text{que} \quad \to 0.$$

Sea una cierta abscisa x; se tiene

$$y = a^x$$

y, si x aumenta en una unidad, y vale

$$y_1 = a^{x+1} = a^x \cdot a$$

$$= y \cdot a \qquad (\text{con } a < 1).$$

— Así, la nueva ordenada es a veces más pequeña y, en cuanto a sea muya pequeña, la función decrece muy rápidamente (fig. 5). Ve-

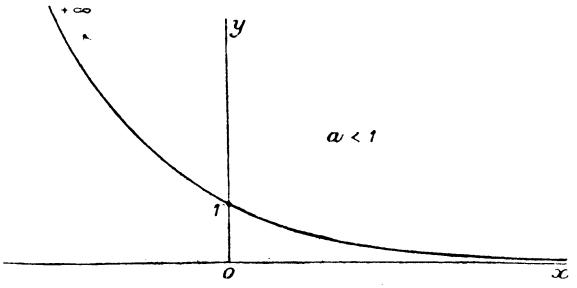

FIG. 5

remos más tarde que no tiene ni máximo ni mínimo, y que decrece indefinidamente.

— También se ve que y es siempre positivo, cualesquiera que sean el signo y el valor de x.

— En la función exponencial y *crece* (o decrece) en una cantidad que depende de su valor actual, como en los intereses compuestos.

14. Algunas explicaciones suplementarias sobre la función exponencial. — Consideremos un capital de 1 peseta colocado a un interés anual del 10 %, y sea buscar el valor de la suma *capital más intereses al cabo de 10 años.*

— *Primer caso: interés simple.* — Cada año, el interés es de $\frac{1}{10}$ pt. Luego, en 10 años, el prestamista ha recibido $\frac{1}{10}$ pt. $\times$ 10 = 1 pt. *El capital se ha doblado.*

La figura 6 representa gráficamente estos hechos para un capital C. Cada eslabón corresponde al interés anual, siendo todos los eslabones iguales.

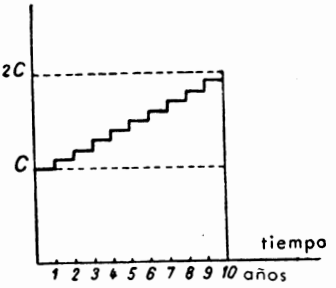

FIG. 6

— *Segundo caso: interés compuesto.* En este caso (realizado, por ejemplo, en las Cajas de Ahorro) el interés anual es añadido *al fin de cada año* al capital, que, por consecuencia, aumenta de año en año.

Para un capital de 1 peseta el interés anual es de $\frac{1}{10}$ peseta, y la suma capital más interés es de $1 + \frac{1}{10}$ pt. Dicho de otra forma, al fin de cada año el capital está multiplicado por $1 + \frac{1}{10}$.

Al final del primer año se posee $1 + \frac{1}{10}$ pt.

Al final del segundo

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)\left(1 + \frac{1}{10}\right) = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^2 \text{ pts.}$$

Al final del tercero

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^2\left(1 + \frac{1}{10}\right) = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^3 \text{ pts.}$$

La repetición del razonamiento muestra que, al final del décimo año, la cantidad poseída es:

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}593742 \text{ pts.}$$

Nótese que 10 es el número de partes iguales en que el tiempo de 10 años ha sido dividido.

En la figura 7, los escalones son desiguales y crecientes, siendo cada uno de magnitud $\frac{11}{10}$ del que le precede.

— *Tercer caso.* — Se puede concebir un modo de cálculo del interés compuesto en el que la adición del interés al capital se haga, no todos los años, *sino cada seis meses*. Para un capital de 1 pt. el interés en 6 meses es de $\frac{1}{10}$ pt. $\times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$ pt., y la suma de capital más interés es de $1 + \frac{1}{20}$ pts. Dicho de otra forma, esta nueva concepción del interés compuesto conduce a multiplicar el capital, al cabo de seis meses, por $1 + \frac{1}{20}$. El capital se convierte, pues, en:

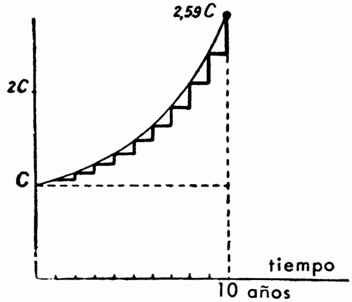

FIG. 7

al cabo de 6 meses

$$1 + \frac{1}{20} \text{ pts.}$$

$$1 \text{ año} \quad \left(1 + \frac{1}{20}\right)\left(1 + \frac{1}{20}\right) = \left(1 + \frac{1}{20}\right)^2 \text{ pts.}$$

$$18 \text{ meses} \quad \left(1 + \frac{1}{20}\right)^2\left(1 + \frac{1}{20}\right) = \left(1 + \frac{1}{20}\right)^3 \text{ pts.}$$

....

$$10 \text{ años.} \qquad \left(1 + \frac{1}{20}\right)^{20} = 2{,}654 \text{ pts.}$$

Donde se ve que, esta forma de capitalizar, reportaría un interés mayor para el mismo capital.

Generalicemos esta concepción de interés compuesto. Si en lugar de dividir los 10 años en 20 partes iguales, los dividimos en 100, 1.000, 10.000... partes iguales, se obtiene un capital final, en pesetas, igual respectivamente a:

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}704, \left(1 + \frac{1}{1.000}\right)^{1.000} = 2{,}7117, \left(1 + \frac{1}{10.000}\right)^{10.000} = 2{,}7182.$$

La función $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ crece pues con el valor de n. *Si n se hace infinito, veremos* (ver II, 4) *que toma un valor finito igual a* 2,718 281 828. Este límite, que interviene en numerosos fenómenos, es designado por la letra *e*.

$$e = 2{,}718\,281\,828...$$

En resumen, si 1 aumenta con crecimiento simple hasta hacerse igual a 2, se haría igual a 2,71828 con crecimiento perfectamente compuesto durante el mismo tiempo.

Esto es lo que ocurre para una variable que crece proporcionalmente a su valor instantáneo, y éste es justamente el caso de la función exponencial.

NOTA. — La función $y = e^x$ presenta la particularidad, como veremos en el capítulo V, de que es también igual a su derivada y a su integral. Es la única función con esta propiedad.

— En el capítulo IX trazaremos en detalle la curva de $y = e^x$.

15. Función logarítmica. — *La función logarítmica es la función inversa de la función exponencial* (puesto que se lee al revés).

$$y = a^x,$$

se dirá, leyendo de derecha a izquierda:

«x es el logaritmo de base a de y» y se escribirá:

$$x = \log_a y.$$

Esta definición, muy general, engloba la definición elemental de los logaritmos decimales, que se obtiene partiendo de dos progresiones: una, aritmética, de razón 1; la otra, geométrica, de razón 10.

Así:

P. A — 0	1	2	3	4	5	6	7
P. G — 1	10	100	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7

Se sabe que, por definición, un término cualquiera de la P. A. es el logaritmo decimal del término correspondiente de la P. G.:

$$3 = \log_{10} 1.000 \qquad 5 = \log_{10} 100.000 \quad \text{etc.}$$

La *base* de un sistema *cualquiera* de logaritmos es, por definición, el número cuyo logaritmo es igual a 1.

Por tanto, para los logaritmos decimales la base es 10, y de ahí su nombre. Las propiedades de estos logaritmos, que nosotros no he-

mos de estudiar aquí, son conocidas. Sin embargo, estos logaritmos no son los primeros inventados, sino que fueron los logaritmos neperianos los que se inventaron en primer lugar.

16. Logaritmos neperianos. — Estos logaritmos, debidos al inglés NEPER, fueron los primeros inventados, al principio del siglo XVII. NEPER se propuso encontrar un procedimiento que permitiera, a los matemáticos y astrónomos europeos de esta época, la simplificación de los complicados cálculos que se veían obligados a efectuar. Este sistema permitía, mediante el empleo de una tabla de logaritmos, transformar los productos en sumas y los cocientes en restas, operaciones mucho más sencillas y rápidas de efectuar.

Fue aproximadamente 10 años más tarde cuando otro inglés inventó los logaritmos decimales, de base 10 y, por tanto, de mayor sencillez, ya que la base de los logaritmos neperianos tiene un extraño valor y complica el cálculo de las tablas.

— ¿De dónde partió NEPER para efectuar sus deducciones? — Lo hizo de la curva $y = \frac{1}{x}$, cuyas propiedades son curiosas y útiles para el problema a resolver.

Veamos primeramente la definición auténtica del logaritmo neperiano de un número x:

Es el valor de la superficie comprendida entre la curva, el eje de de las x, la ordenada cuya abscisa es x y la ordenada de abscisa 1, es decir, la superficie rayada de la figura 8.

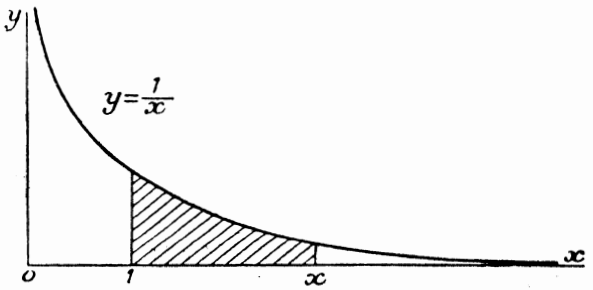

FIG. 8

NEPER partió de la abscisa 1 porque sabía, ya en esta época, que, si hubiera partido de $x = 0$, la superficie hubiera sido infinita. Teniendo, pues, que partir de alguna parte, lo hizo de este sencillo valor $x = 1$. De aquí se deduce que el logaritmo neperiano de 1 es cero.

Se designa los logaritmos neperianos por las letras Log (L mayúscula (1), y se escribirá

$$\text{Log } 1 = 0$$
$$\text{Log } x = \text{superficie ABCD.}$$

Consideremos ahora, en la figura 9, una abscisa x, después una abscisa K (> 1), y, por último, la abscisa Kx.

Dividamos la longitud AC en n partes iguales, así como la longitud A'C'. Un elemento de la longitud A'C' será, pues, K veces más largo que un elemento de la longitud AC; pero como la altura de un elemento de A'C' es *K veces menor* $\left(\text{puesto que } y = \frac{1}{Kx}\right)$, la superficie de estos dos elementos será la misma. (Siendo n muy grande, cada uno de estos elementos se puede tomar como un rectángulo).

De aquí resulta que (fig. 9):

$$\text{sup. ABCD} = \text{sup. A'B'C'D'}.$$

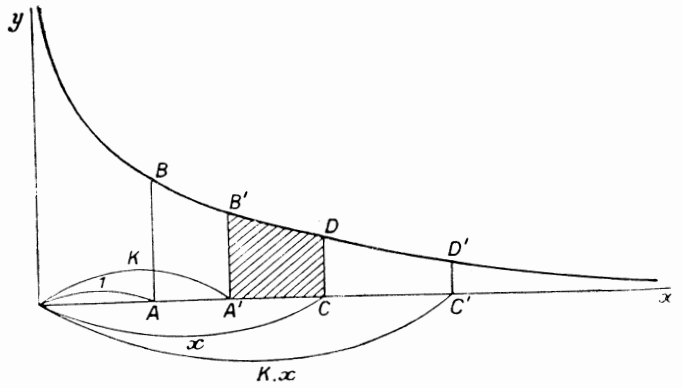

FIG. 9

(1) Una reciente normalización internacional prevé los símbolos siguientes:

$\log_a$	para logaritmos de base a,
ln	para logaritmos neperianos, de base e,
lg	para logaritmos decimales, de base 10,
lb	para logaritmos binarios, de base 2.

En algunas obras antiguas se encuentra todavía L para designar los logaritmos neperianos.

Así pues, estas dos superficies tienen una parte común: la parte rayada A'B'C'D'. Por tanto

$$\text{sup. } ABA'B' = \text{sup. } CDC'D'.$$

Demostrado esto, se puede escribir:

$$\begin{aligned}\text{sup. total } ABC'D' &= \text{sup. } ABCD + \text{sup. } CDC'D' \\ &= \text{sup. } ABCD + \text{sup. } ABA'B'.\end{aligned}$$

Reemplazando estas superficies por sus valores, según la definición de los logaritmos neperianos, se obtiene:

$$\text{Log K} \cdot x = \text{Log } x + \text{Log } K.$$

Se ve así, cosa esencial, que *el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de cada factor.*

De aquí se deducen todas las propiedades de los logaritmos; se derivan de la fórmula precedente y son análogas a las de los logaritmos decimales:

$$\text{Log } \frac{a}{b} = \text{Log } a - \text{Log } b$$

$$\text{Log } (a^n) = n \cdot \text{Log } a$$

$$\text{Log } \sqrt[n]{a} = \text{Log } a^{1/n} = \frac{1}{n} \cdot \text{Log } a.$$

Para números menores que 1 (pero mayores que 0) el convenio es siempre contar la superficie *desde* la ordenada, cuya abscisa es $x = 1$, pero, como esta superficie está *a la izquierda* de esta ordenada, será negativa (siendo positiva cuando está tomada a la derecha). Se tendrá, pues, en la figura 10:

$$\text{Log } \frac{1}{2} = \text{superficie rayada, pero tomada negativamente} =$$

$$= \text{Log } 1 - \text{Log } 2 = -\text{Log } 2.$$

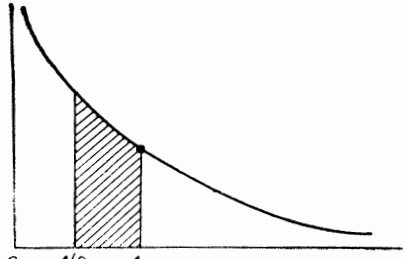

FIG. 10

En cuanto a los números negativos, no tienen logaritmos neperianos, ya que para ellos no se puede cumplir la fórmula $y = a^x$, pues, como hemos visto anteriormente, y no puede ser negativo.

NOTA.—Si se parte de $y = \text{Log } x$, se deduce

$$x = e^y.$$

En efecto, tomando logaritmos en los dos miembros:

$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Log}(e^y) = y \cdot \operatorname{Log} e = y \cdot 1$$
$$\operatorname{Log} x = y.$$

Asimismo, si se parte de $y = \log_{10} x$, se deduce

$$x = 10^y.$$

En efecto, de aquí se saca $\log_{10} x = y$.

De esta forma se pasa del logaritmo al número.

17. Curva de la función logarítmica. — Nos referiremos a los logaritmos neperianos. Como de costumbre, llamemos x a la variable e y a la función:

$$y = \operatorname{Log} x$$

variando x de 0 a $+\infty$.

Para $x = 0$, como la superficie de 0 a 1 es infinita (véase más adelante en el cálculo de las superficies), se tiene:

$$\operatorname{Log} 0 = -\infty.$$

Para $x = 1$

$$\operatorname{Log} 1 = 0.$$

Para $x = +\infty$, veremos más adelante que la superficie es infinita:

$$\operatorname{Log} \infty = +\infty.$$

También veremos en el trazado detallado de la curva, después del cálculo de las derivadas, que no hay ni máximo ni mínimo, siendo la función siempre creciente. La curva tiene la forma de la figura 11, que estudiaremos detalladamente en el párrafo 73. Basta, por otra parte, tomar la curva $y = e^x$ y considerar la simetría con relación a la bisectriz de xOy, lo que cambia x en y, e y en x.

Base de los logaritmos neperianos.

La base de un sistema de logaritmos es, por definición, el número cuyo logaritmo es igual a 1.

Es preciso, pues, encontrar una abscisa OM (fig. 12) tal que la superficie ABMM′ = 1, es decir, que sea igual a la del cuadrado OABP.

Se cumple (ver Tomo III de cálculo integral, en el cálculo de las superficies, así como Tomo II (§ 3), en el capítulo de los desarrollos en serie):

$$OM = 2{,}71828\ldots = e.$$

18. Relación entre logaritmos neperianos y decimales. — Esta relación es constante, cumpliéndose:

$$\boxed{\text{Log } x = 2{,}30259 \cdot \log_{10} x \simeq 2{,}3 \log_{10} x}$$

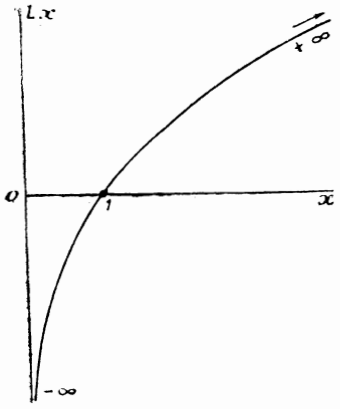

FIG. 11

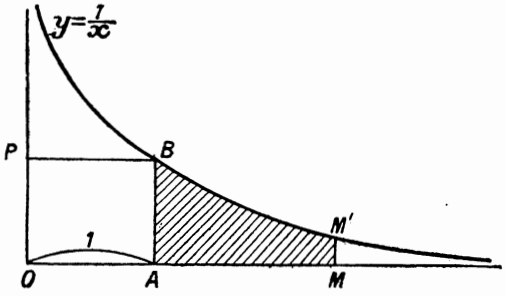

FIG. 12

Demostración: Partamos de la expresión $x = e^y$ (de donde se deduce $y = \log_e x = \text{Log } x$). Tomando el logaritmo de base 10:

$$\log_{10} x = \log_{10} (e^y) = y \cdot \log_{10} e$$
$$= \text{Log } x \cdot \log_{10} e$$

de donde sale

$$\text{Log } x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = \frac{1}{\text{M}} \cdot \log_{10} x$$

M recibe el nombre de módulo y, calculando el logaritmo decimal de *e*, se encuentra 0,43429; de donde

$$\frac{1}{\text{M}} = \frac{1}{0{,}434\,29} = 2{,}302\,59\ldots \qquad \text{c.q.d.}$$

Así se puede deducir los logaritmos neperianos de los logaritmos decimales: basta con multiplicar estos últimos por 2,302 59.

19. Otra forma de la función exponencial. — Sea $y = a^x$.

Para	$x = 0$	$y = a^0 = 1$	
»	$x = 1$	$y = a$	
»	$x = 2$	$y = a^2$,	etc.

Así, a es la relación de dos ordenadas sucesivas.

Tomemos los logaritmos neperianos de los dos miembros:

$$\text{Log } y = \text{Log } (a^x) = x \cdot \text{Log } a.$$

Siendo a una constante, Log a es también una constante que llamaremos b (suponiendo $a > 1$):

$$\text{Log } a = b$$

de donde

$$\text{Log } y = x \cdot b$$

y, pasando del logaritmo al número, como anteriormente hemos visto, se deduce:

$$\boxed{y = e^{bx}}$$

expresión que constituye, en realidad, la verdadera forma de la función exponencial.

Así, en resumen, la expresión a^x puede ponerse siempre bajo la forma e^{bx}.

Si, por casualidad, $a < 1$, se escribiría:

$$\text{Log } a = -b$$

de donde

$$\text{Log } y = -b \cdot x$$

y también

$$y = e^{-bx}$$

que es una exponencial decreciente.

— Encontramos exponenciales decrecientes en un gran número de aplicaciones prácticas, por ejemplo:

1.° la temperatura de un cuerpo que se enfría está dada por la fórmula aproximada

$$\theta = \theta_0 \cdot e^{-bt}$$

donde t es el tiempo, y donde b es una constante que depende de la naturaleza, de la forma y del color del cuerpo.

2.° en la descarga de un condensador eléctrico en una resistencia, la intensidad de la corriente en función del tiempo es

$$i = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{CR}}.$$

3.° en el establecimiento de la corriente en una bobina de inducción se tiene

$$i = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

4.° en las vibraciones de resortes, las oscilaciones de un péndulo, un depósito de agua que se vacía por la base, etc.

5.° en la descarga oscilante de un condensador en una bobina, la corriente está dada por

$$i = I \cdot e^{-\alpha t} \cdot \operatorname{sen} \omega t.$$

20. Ejercicios sobre las exponenciales. — 1.° Sea $y = e^{5x}$; se pide calcular x en función de y.

Tomemos los logaritmos neperianos de los dos miembros: y como $\operatorname{Log} e = 1$,

$$\operatorname{Log} y = 5x$$

de donde

$$x = \frac{1}{5} \operatorname{Log} y.$$

2.° Sea $\log_{10} y = 3$. Calcular y.

Para tener y, se toma la base, aquí 10, y se eleva a la potencia indicada a la derecha del signo *igual*, aquí 3:

$$y = 10^3 = 1.000,$$

en efecto, el logaritmo decimal de 1.000 es 3.

3.° Sea $\operatorname{Log} y = 3$. Calcular y.

Para tener y, se toma la base, aquí e, que se eleva a la potencia indicada a la derecha, aquí 3:

$$y = e^3,$$

en efecto, el logaritmo neperiano de e^3 es 3:

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{Log} e^3 = 3 \cdot \operatorname{Log} e = 3 \cdot 1 = 3.$$

4.° Sea la expresión:

$$i = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{CR}} \qquad \text{con} \qquad \begin{array}{l} I_0 = 100 \text{ miliamperios} \\ i = 10 \text{ miliamperios} \\ c = 1 \text{ microfaradio} \\ R = 1 \text{ megohmio.} \end{array}$$

Se pide calcular t.

Se tiene

$$\frac{i}{I_0} = e^{-\frac{t}{CR}} = \frac{1}{e^{\frac{t}{RC}}}$$

o bien

$$\frac{I_0}{i} = e^{\frac{t}{CR}}$$

Tomando logaritmos neperianos de los dos miembros:

$$\text{Log}\,\frac{I_0}{i} = \text{Log}\, e^{\frac{t}{CR}} = \frac{t}{CR} \cdot \text{Log}\, e$$

$$= \frac{t}{CR} \cdot 1$$

de donde

$$t = CR \cdot \text{Log}\,\frac{I_0}{i} = 10^{-6} \cdot 10^{6}\, \text{Log}\,\frac{0{,}100}{0{,}010}$$

$$= \text{Log}\, 10 = 2{,}3 \cdot \log_{10} 10$$

$$= 2{,}3 \text{ s.}$$

21. Funciones trigonométricas inversas. — Función arco seno. — Partamos de

$$y = \text{sen}\, x$$

donde x varía de 0 a 2π e y de -1 a $+1$.

— Leemos de derecha a izquierda: *x es el arco cuyo seno es igual a y*, lo cual se escribe:

$$x = \text{arc sen}\, y.$$

— Si se considera ahora esto como una nueva función, y siguiendo la costumbre que consiste en llamar x a la variable e y a la función, escribiremos

$$y = \text{arc sen } x$$

donde x varía de -1 a $+1$, e y de $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$. Ahora bien, hay una infinidad de arcos que tienen el mismo seno, por lo que la curva de y tendrá pues una multitud de ramas, *que estudiaremos con detalle en el capítulo IX mediante las derivadas, lo que es muy simple y cómodo,* ...por lo cual no se hace jamás en las obras ordinarias. La figura 13 es la curva de $y = \text{arc sen } x$, como se verá en el capítulo IX.

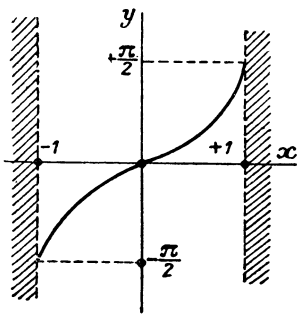

FIG. 13

Función arco seno. — Análogamente, partiendo de

$$y = \cos x$$

se escribe, leyendo de derecha a izquierda:

$$x = \text{arc cos } y$$

que escribiremos mejor, para llamar y a la función y x a la variable:

$$y = \text{arc cos } x$$

donde x varía de -1 a $+1$ e y de π a 0. Esta curva la trazaremos con detalle en el estudio de las variaciones de las funciones (capítulo IX, fig. 64).

Función arco tangente. — Partimos de

$$y = \text{tg } x$$

y leemos de derecha a izquierda: x es un arco cuya tangente es igual a y, lo cual se escribe:

$$x = \text{arc tg } y$$

donde, llamando y a la función y x a la variable:

$$y = \text{arc tg } x$$

donde x varía de $-\infty$ a $+\infty$, *e* y de $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$.

La figura 14 indica la curva de $y = \text{arc tg } x$ (ver capítulo IX).

NOTA. — Es fácil ver que, para obtener las curvas de estas tres funciones, es suficiente partir de las tres curvas

$$y = \operatorname{sen} x \qquad y = \cos x \qquad y = \operatorname{tg} x$$

y hacerlas girar 90°, lo que invierte las x y las y.

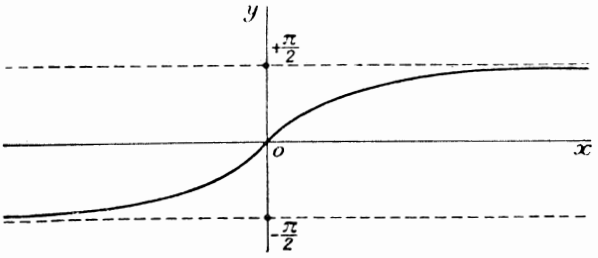

FIG. 14

Funciones hiperbólicas. — Estudiaremos estas funciones *cuando hayamos visto lo que ellas representan,* lo que no puede hacerse lógicamente más que en el cálculo integral, en el cálculo de las superficies, contrariamente a lo que se hace normalmente... *Siendo éste un libro de enseñanza, es absurdo poner el arado antes que los bueyes.*

CAPITULO IV

LAS DERIVADAS

22. Introducción. — Aquí comienza uno de los más importantes capítulos de las matemáticas. Las derivadas tienen repercusiones innumerables y un gran número de aplicaciones prácticas, sirviendo de introducción al cálculo diferencial. Nuestro fin es el explicarlas y hacerlas conocer claramente al lector.

— Es a partir de este capítulo cuando las matemáticas se hacen *realmente interesantes.*

— El autor espera de este modo interesar vivamente al lector que quiere comprender e iniciarse en las matemáticas superiores, las cuales no son forzosamente más difíciles. En todo caso, el lector deberá darse cuenta de que *todo lo que es anterior a las derivadas* constituye el alfabeto y la gramática de las matemáticas serias.

— *Este capítulo, bastante largo, sirve de introducción a esta maravilla de las matemáticas que se llama cálculo diferencial e integral.*

— Las derivadas aparecieron, de forma algo oscura por otra parte, en la primera mitad del siglo XVII (siglo de *Luis XIV*), a continuación del estudio de tangentes a las curvas hecho por varios matemáticos, y también a continuación del estudio de los máximos y mínimos por FERMAT, DESCARTES y otros matemáticos franceses, ingleses e italianos.

— Este estudio consta de dos partes:

1.° *El cálculo propiamente dicho de las derivadas* de las funciones simples o complicadas. Esta parte es ingrata, hay que confesarlo; pero, naturalmente, es obligatoria.

2.° *Las aplicaciones de las derivadas,* entre ellas la búsqueda de máximos y mínimos.

Esperamos mostrar al lector, mediante aplicaciones numerosas, y *cuidadosamente explicadas,* a diferentes dominios, el interés de este estudio.

Se verá, en efecto, que las derivadas permiten encontrar el máximo o el mínimo de una función cualquiera, lo que es de gran utilidad en la práctica. Son también de una gran ayuda en el trazado de curvas con precisión.

Finalmente, sirven de introducción a las diferenciales, las cuales no pueden ser abordadas ni estudiadas más que por un espíritu previamente preparado.

23. Preliminares al cálculo de las derivadas. — Por el momento no decimos todavía lo que es una derivada, comenzando por pequeños cálculos muy simples.

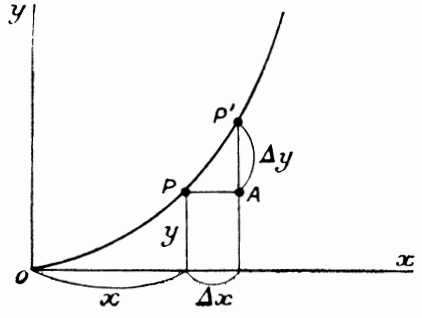

FIG. 15

Primer ejemplo. — Sea la función $y = x^2$, que, gráficamente, está representada por una parábola (fig. 15).

Coloquémonos en un punto P cualquiera, de abscisa x y ordenada y.

Demos a x un pequeño incremento, que designaremos por el símbolo internacional Δx, y que se pronuncia «delta x». No se trata del producto de la letra Δ por la letra x; *es un símbolo,* un signo de escritura que quiere decir: un pequeño incremento dado a x.

— La curva muestra que P viene a P' y la ordenada y ha variado en una cantidad AP', que llamaremos Δy.

El nuevo valor y_1 de la ordenada del punto P' es, pues, el cuadrado de la nueva abscisa (ésta es la ley de la curva):

$$y_1 = y + \Delta y$$
$$= (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2,$$

la variación de y es pues:

$$\Delta y = y_1 - y = (x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2) - x^2$$
$$= 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2.$$

Consideremos ahora la relación de los dos incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. *Esta relación es de gran interés, ya que nos proporciona información sobre la velocidad con que varía la función y.*

En efecto, cuanto mayor es Δy para un Δx dado, la función y crece con mayor rapidez; esto es evidente.

Se tiene pues

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Ahora llegamos al momento crítico:

Volvamos al punto P haciendo tender Δx a cero; lo mismo ocurrirá para $\Delta y = AP'$, y, en el límite, en el momento preciso en que Δx se hace nulo, P' se convierte en P, dando el cociente $\frac{0}{0}$, lo cual es una indeterminación. Ahora bien, si nosotros observamos a la derecha del signo «*igual*» para ver lo que queda *cuando se hace* $\Delta x = 0$, constatamos que queda $2x$. Se escribirá entonces simbólicamente, cuando Δx tiende hacia 0:

$$\text{límite de } \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0} = 2x,$$

$2x$ es la derivada de la función $y = x^2$.

— En suma, conviene ver bien que cantidades tales como Δy o Δx son cantidades «*elásticas*» que tienden a 0, y que reciben además el nombre de «infinitamente pequeños».

— Prácticamente, en los cálculos, cuando se quiere ver lo que queda en el límite, *basta hacer $\Delta x = 0$ en el miembro de la ecuación que está a la derecha del signo igual.*

Segundo ejemplo. — Sea $y = x^3$.

Rehagamos los mismos cálculos, pero sin figura.

Coloquémonos en un punto cualquiera de la curva, donde la abscisa es x y la ordenada y.

En cada punto $y = x^3$.

— Demos a x un incremento Δx; y, a su vez, varía, convirtiéndose en y_1 que es siempre el cubo de la nueva abscisa:

$$y_1 = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3$$
$$= y + \Delta y.$$

La variación de y es pues:

$$\begin{aligned}\Delta y &= y_1 - y \\ &= (x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3) - x^3 \\ &= 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3.\end{aligned}$$

Hagamos la relación de los dos incrementos:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} \\ &= 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2.\end{aligned}$$

— Si ahora Δx tiende a 0, lo mismo ocurrirá con Δy y se tendrá $\frac{0}{0}$ en el límite. Pero, si observamos a la derecha del signo «*igual*», vemos que, *haciendo* $\Delta x = 0$, queda $3x^2$. Se podrá, pues, escribir:

$$\text{límite de } \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0} = 3x^2$$

$3x^2$ es la derivada de x^3.

Tercer ejemplo. — Sea la función $y = ax$, donde a es una constante cualquiera (por lo tanto no conteniendo x). Demos a x un incremento Δx.

La función y varía y se transforma en:

$$\begin{aligned}y_1 &= a(x + \Delta x) \\ &= y + \Delta y,\end{aligned}$$

la variación de y es, pues

$$\begin{aligned}\Delta y = y_1 - y &= a(x + \Delta x) - ax \\ &= a \cdot \Delta x\end{aligned}$$

y la relación de los dos incrementos será

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a,$$

la cual es constante, y el límite de esta relación será también igual a a si se hace tender Δx a 0:

$$\text{límite de } \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0} = a.$$

Como ya antes indicamos, este límite recibe el nombre de derivada de la función, que, en este caso, es igual a a.

— Tras estos tres ejemplos estamos ya en condiciones de dar la definición de la derivada de una función.

24. Definición de la derivada de una función. — Sea una función cualquiera

$$y = f(x).$$

Coloquémonos en un punto cualquiera de la curva, de abscisa x y de ordenada y. Demos a x un incremento Δx; la ordenada y varía la cantidad Δy (en aumento o disminución).

Se llamará derivada de y con relación a x al límite del cociente de la variación Δy de la función por el incremento correspondiente Δx de la variable, cuando Δx tiende *a* 0:

$$\text{derivada de } y = \text{límite de } \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0}$$

Esta derivada se escribe y' o bien $f'(x)$, y se pronuncia: «*y prima*» o bien «*f prima de x*».

Aplicando esta definición se puede entonces calcular las derivadas de las principales funciones usuales; en seguida estudiaremos las aplicaciones de las derivadas.

25. Procedimiento general para calcular una derivada. — Se opera como sigue:

1.° se da a la variable x un incremento Δx;

2.° se calcula el nuevo valor y_1 de la función, o sea

$$y_1 = y + \Delta y$$

siendo Δy la variación de y;

3.° se calcula la variación Δy de la función y, que es la diferencia entre el valor final y_1 y el inicial y:

$$\Delta y = y_1 - y$$

4.° se hace el cociente de los dos incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, y *se simplifica*;

5.° se pasa al límite haciendo tender Δx hacia 0; es decir, que en el miembro de la derecha *se reemplaza* Δx *por* 0, observando qué es lo que queda; esto es el valor de la derivada de y.

NOTA I. — Antes de hacer $\Delta x = 0$ es indispensable *simplificar* la fracción que se ha obtenido, so pena de cometer errores.

NOTA II. — Algunas veces, para precisar, se indica con un índice la letra con relación a la cual se toma la derivada, y se escribe:

$$f_x' \qquad \text{o bien} \qquad y_x'.$$

26. CALCULO DE LAS DERIVADAS DE LAS FUNCIONES USUALES

1.° **Derivada de** $\boxed{y = a \cdot x}$

donde a es una constante *cualquiera*, positiva o negativa, y, en cualquier caso, no conteniendo a x.

— Hemos visto ya antes que la derivada era la constante a; por tanto, es inútil rehacer el cálculo:

$$\boxed{y' = a}$$

Así pues, la derivada es el coeficiente de x tomado con su signo.

Ejemplos:

$$y = x \qquad y' = 1$$
$$y = -3x \qquad y' = -3$$
$$y = \frac{x}{m} \qquad y' = \frac{1}{m}$$
$$y = \frac{1-a}{1-b} \cdot x \qquad y' = \frac{1-a}{1-b}$$
$$V = RI = f(I) \qquad V'_I = R$$
$$Z = L\omega = f(\omega) \qquad Z'_\omega = L.$$

2.° **Derivada de una constante:** $\boxed{y = a}$

Puesto que la función es constante no puede variar, por lo que Δy es nulo, e y' también lo es:

$$\boxed{y' = 0}$$

La derivada de una constante es nula.

3.° **Derivada de una potencia:** $\boxed{y = x^m}$

donde m es un número entero o fraccionario, positivo o negativo.

Ya hemos calculado al principio de este capítulo las derivadas de $y = x^2$ y de $y = x^3$, encontrando

para $y = x^2$ $y' = 2x = 2x^1$

para $y = x^3$ $y' = 3x^2$

para $y = x^4$ se encontraría $y' = 4x^3$, etc.

En el capítulo X veremos el procedimiento general para calcular la derivada de $y = x^m$, *cualquiera que sea el exponente m, pero, por el momento, podemos generalizar los cálculos precedentes para un exponente m entero y positivo*: el exponente m pasa a ser el coeficiente de x, mientras que el nuevo exponente de x disminuye en una unidad, quedando $m - 1$.

Se tiene, pues:

para $y = x^m$ $\boxed{y' = m \cdot x^{m-1}}$

Pero la ventaja de esta fórmula, cuestión que se demostrará en §80, *es que se aplica a todos los valores de m, positivo, negativo, entero o fraccionario.*

Ejemplos:

$y = x^6$ $y' = 6x^5$

$y = x^{-6}$ $y' = -6x^{-6-1} = -6x^{-7}$

$y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ $y' = -1 \cdot x^{-1-1} = -\dfrac{1}{x^2}$

$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $y' = \dfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = x^{-\frac{5}{4}}$ $y' = -\dfrac{5}{4} x^{-\frac{5}{4}-1} = -\dfrac{5}{4} x^{-\frac{9}{4}}$

o también

$$y' = -\frac{5}{4\sqrt[4]{x^9}}$$ etc.

Caso particular:

Derivada de $\boxed{y = x}$

basta con hacer $m = 1$ en la función $y = x^m$; se tendrá

$$y' = m \cdot x^{m-1} = 1 \cdot x^{1-1} = x^0.$$

Pero sabemos que cualquier número elevado a la potencia 0 es igual a 1. Por tanto

$$\boxed{y' = 1}$$

Así la derivada de la variable x es igua al 1.

4.º **Derivada de** $\boxed{y = \frac{1}{x}}$

Aunque acabamos de hacer en realidad este cálculo, ya que $y = x^{-1}$ es una potencia, creemos útil, a título de ejercicio, efectuar el cálculo directo.

Demos a x un incremento Δx; y varía transformándose en:

$$y_1 = \frac{1}{x+\Delta x} = y + \Delta y,$$

la variación de y es, pues

$$\Delta y = y_1 - y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x^2 + \Delta x \cdot x}$$

y se tendrá

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\dfrac{\Delta x}{x^2 + x \cdot \Delta x}}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2 + \Delta x \cdot x}$$

Si $\Delta x \to 0$, queda (haciendo en el segundo miembro $\Delta x = 0$):

$$\text{límite de } \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0} = -\frac{1}{x^2}$$

por tanto

$$\boxed{y' = -\frac{1}{x^2}}$$

5.º **Derivada de** $\boxed{y = \sqrt{x}}$

También hemos hecho ya este cálculo, pues y es una potencia $y = x^{1/2}$. Pero hagámoslo también directamente a título de ejercicio.

Demos a x un incremento Δx; y varía y se convierte en y_1:

$$y_1 = \sqrt{x + \Delta x} = y + \Delta y$$

la variación de y es, pues

$$\Delta y = y_1 - y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}.$$

Se tendrá

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Si se hace ahora $\Delta x = 0$, se obtiene $\frac{0}{0}$, que es una indeterminación. Para evitarla, multipliquemos arriba y abajo por la cantidad conjugada del numerador, es decir por $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

Si ahora pasamos al límite, cuando $\Delta x \to 0$, queda (haciendo en el segundo miembro $\Delta x = 0$):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

por tanto

$$\boxed{y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

6.° **Derivada de** $\boxed{y = a \cdot x^m}$

donde a es una constante cualquiera, positiva o negativa, no conteniendo x.

Hagamos primeramente $m = 1$ de donde $y = a \cdot x$ e $y' = a$,
Hagamos ahora $m = 2$ $y = ax^2$.

Demos a x un incremento Δx; y varía y se convierte en y_1:

$$y_1 = y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2$$
$$= a(x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2).$$

La variación de y es, pues:

$$\begin{aligned}\Delta y &= y_1 - y \\ &= (ax^2 + 2ax \cdot \Delta x + a \cdot \Delta x^2) - ax^2 \\ &= 2ax \cdot \Delta x + a \cdot \Delta x^2,\end{aligned}$$

y se tendrá

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax \cdot \Delta x + a \cdot \Delta x^2}{\Delta x} = 2ax + a \cdot \Delta x.$$

Si ahora $\Delta x \to 0$, Δy tiende también a 0, y se tendrá en el límite (haciendo $\Delta x = 0$ en el segundo miembro):

$$\text{límite de } \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0} = 2ax.$$

Es decir que

$$y' = 2ax.$$

Nótese que es a veces mayor que la derivada de $y = x^2$, que es $2x$.

Haciendo el mismo cálculo con $m = 3$ (y al principio de este capítulo hemos hecho el cálculo para $y = x^3$), se encontraría

$$y' = 3ax^2.$$

Para $y = ax^4$ se tendría $y' = 4ax^3$. Se puede, pues, generalizar, al menos para m entero y positivo, y decir que:

$$\text{la derivada de } y = ax^m \text{ es } \boxed{y' = m \cdot ax^{m-1}}$$

la cual es a veces mayor que la derivada de x^m.

Pero más tarde, al final de este tomo, demostraremos que esta fórmula es muy general y se aplica a cualquier valor de m, positivo o negativo, entero o fraccionario.

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
&y = -6x^4 && y' = -24x^3 \\
&y = \frac{x^5}{1-m} && y' = \frac{5}{1-m} \cdot x^4 \\
&y = 2x^{-3} && y' = -6x^{-4} \\
&y = -5x^{-4} && y' = +20x^{-5} \\
&y = 2x^{1/2} && y' = \frac{2}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \\
&y = -5x^{3/4} && y' = -\frac{15}{4} x^{-1/4} = -\frac{15}{4\sqrt[4]{x}}.
\end{aligned}$$

7.° **Derivada de** $\boxed{y = \frac{a}{x}}$

Basta con hacer $m = -1$ en $y = ax^m$, obteniéndose:

$$y' = -1 \cdot ax^{-1-1} = -a \cdot x^{-2}$$

o bien $\boxed{y' = -\frac{a}{x^2}}$

Ejemplos:

$$y = -\frac{3}{x} \qquad y' = +\frac{3}{x^2}$$

$$y = \frac{a^2 - 1}{x} \qquad y' = -\frac{(a^2 - 1)}{x^2}$$

$$I = \frac{V}{R} = f(R) \qquad I'_R = -\frac{V}{R^2}$$

$$Z = \frac{1}{C\omega} = f(\omega) = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{\omega},$$

pongamos

$$Z = a \cdot \frac{1}{\omega} \quad \text{de donde} \quad Z' = -\frac{a}{\omega^2} = \frac{1}{C\omega^2}.$$

8.° **Derivada de** $\boxed{y = a\sqrt{x}}$

Hagamos $m = \frac{1}{2}$ en $y = ax^m$ y tendremos

$$y' = \frac{1}{2} a \cdot x^{1/2-1} = \frac{a}{2} \cdot x^{-1/2}$$

$$\boxed{y' = \frac{a}{2\sqrt{x}}}$$

Ejemplos:

$$y = 4\sqrt{x} \qquad y' = \frac{4}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{1}{a}\sqrt{x} \qquad y' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

27. Significación geométrica de la derivada. — Antes de continuar el cálculo de las derivadas es necesario examinar cuál es la significación geométrica de la derivada

Sea una función $y = f(x)$ representada por una curva, por ejemplo la de la figura 16. Situémonos en un punto P cualquiera de coordenadas x e y, y demos a x un incremento Δx.

La ordenada y varía, transformándose en y_1 (supongamos por ejemplo que y *aumenta*), mientras que P pasa a ser P'.

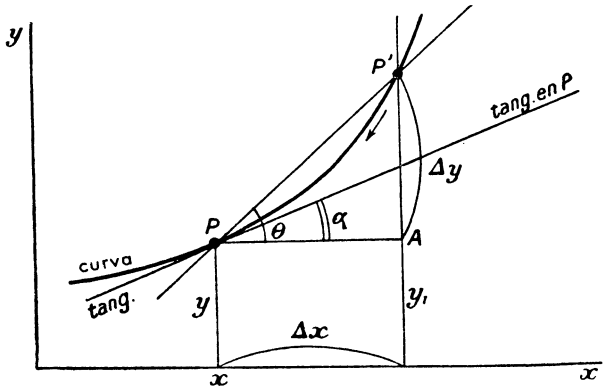

FIG. 16

— Por el punto P tracemos una paralela al eje de las x(PA), la cual nos da la variación Δy(P'A). Trazando la secante PP' vemos que, en el triángulo rectángulo PAP', se tiene:

$$\frac{P'A}{PA} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \theta$$

siendo θ la inclinación de la secante.

Si ahora Δx tiende a O, P' se deslizará a lo largo de la curva hasta confundirse con P, la secante PP' girará alrededor del punto P que es fijo, *y, en el límite, en el preciso instante en que* Δx *es nulo, P' se confundirá con P,* Δy *será nulo y la secante se convertirá en la tangente a la curva en el punto P.* (Sabemos que, lo mismo que para el círculo, la tangente en un punto es el límite de las posiciones de una secante cuando, siendo fijo uno de los puntos, el otro viene a confundirse con el primero).

Si llamamos α al ángulo que forma la tangente a la curva en el

punto P con el eje de las x, se ve que el límite de θ es α, y tendremos (aunque $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{0}$ en el límite)

$$\boxed{\text{límite de } \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0} = y' = \operatorname{tg} \alpha}$$

de donde se deriva la regla:

REGLA. — *La derivada de una curva en un punto cualquiera es igual a la pendiente de la tangente geométrica a la curva en ese punto*; es decir, igual a tg α, siendo α el ángulo que forma con el eje de las x la tangente a la curva en el punto considerado.

Es preciso, naturalmente, reemplazar x en la derivada por la abscisa del punto considerado.

— Ya se verán más adelante las importantes consecuencias de esta regla.

— Conociendo el valor de la derivada en un punto, es decir, tg α, bastará mirar en las tablas trigonométricas para encontrar el valor del ángulo α en grados, pero a condición de que la escala de las x sea la misma que la de las y, ya que, si se toma escala diferente para las x (sin cambiar la de las y), es evidente que el valor de α variará.

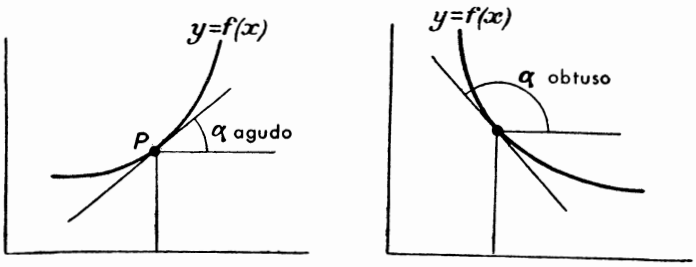

FIG. 17

— Prácticamente, sin embargo, esto no tiene apenas importancia, ya que no se suele buscar el valor exacto de α en grados, *sino conocer si este ángulo α es grande o pequeño, nulo o igual a $\frac{\pi}{2}$, o bien si es agudo u obtuso*. Esto es lo que importa en la práctica, como se verá en seguida

De la regla precedente se deduce que:

si y' es positivo *el ángulo α es agudo*
si y' es negativo *el ángulo α es obtuso*

En efecto, todo ángulo agudo tiene una tangente positiva, y todo ángulo obtuso la tiene negativa.

La figura 17 ilustra estas explicaciones.

Ejemplos: 1.° Sea $y = x^2$ (fig. 18) $y' = 2x$.

Supongamos que las escalas de x e y son iguales:

para	$x = 0$	$y' = \operatorname{tg}\alpha = 0$	de donde	$\alpha = 0$
»	$x = 1$	$y' = 2 = \operatorname{tg}\alpha$	»	$\alpha \simeq 64°$
»	$x = 2$	$y' = 4$	»	$\alpha \simeq 76°$
»	$x = 3$	$y' = 6$	»	$\alpha \simeq 81°$
»	$x = -1$	$y' = -2$	»	$\alpha \simeq 116°$
»	$x = -2$	$y' = -4$	»	$\alpha \simeq 104°$
»	$x = \pm\infty$	$y' = \infty$	»	$\alpha = 90°$

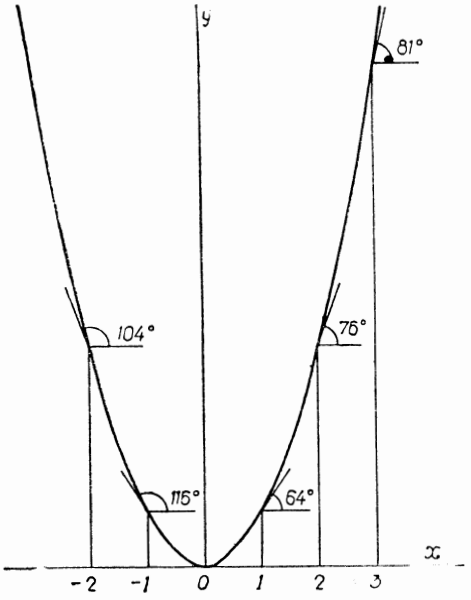

FIG. 18

Se ve así por qué la parábola la parábola $y = x^2$, cuyo eje es vertical, tiene sus dos ramas, a partir de 0, cada vez más inclinadas, y por qué estas ramas tienden a ser verticales.

2.° Sea

$$y = \frac{1}{x} \text{ (fig. 19)} \qquad y' = -\frac{1}{x^2}.$$

para	$x = 1$	$y' = \operatorname{tg}\alpha = -1/1$	de donde	$\alpha = 135°$
»	$x = 2$	$y' = -1/4$	»	$\alpha \simeq 166°$
»	$x = \frac{1}{2}$	$y' = -4$	»	$\alpha \simeq 104°$
»	$x = 0$	$y' = -1/0 = \infty$	»	$\alpha = 90°$.

Lo que demuestra que la curva tiende a curvarse y a ponerse horizontal. Además para $x = \infty$, $y' = 1/\infty = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$, $\alpha = 0$.

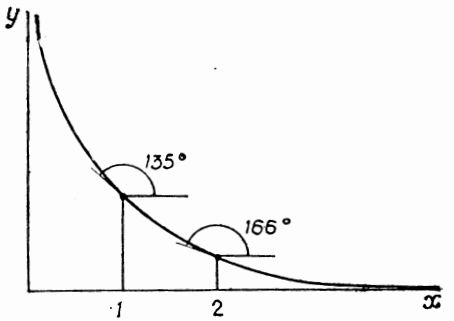

FIG. 19

Importancia de la noción de la derivada. — La noción de derivada interviene en un gran número de fenómenos; por ejemplo, si tomamos el tiempo t como variable:

una velocidad $v = \lim \dfrac{\Delta x}{\Delta t \to 0}$ es la derivada del espacio respecto al tiempo.

una aceleración $\gamma = \lim \dfrac{\Delta v}{\Delta t \to 0}$ es la derivada de una velocidad respecto al tiempo.

una intensidad de corriente $i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$ es la derivada de la carga respecto al tiempo.

una fuerza electromotriz inducida $e = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ es la derivada del flujo respecto al tiempo, etc.

Todas estas nociones se precisarán más adelante, calculando sus valores, viéndose entonces la aplicación a las diferenciales.

28. Derivadas de las líneas trigonométricas fundamentales. — Antes de calcular las derivadas de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\operatorname{tg} x$, demostremos el teorema siguiente, el cual necesitaremos para lo que sigue.

TEOREMA. — *La relación* $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ *tiende hacia* 1 *cuando el arco* x *tiende a* 0.

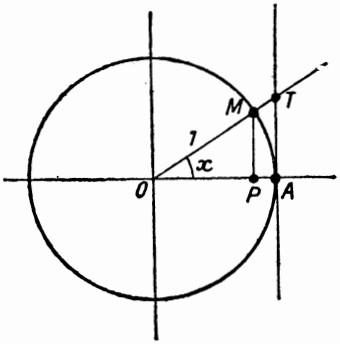

FIG. 20

Aclaremos que se trata de la *longitud del arco* x y no del ángulo x en grados o en radianes.

— Cuando $x \to 0$, $\operatorname{sen} x$ tiende también a 0 y se obtiene $\frac{0}{0}$, que es una indeterminación.

— Para disipar la duda, observamos la figura 20, que representa un círculo de radio unidad, con un arco x, su seno y su tangente. Se ve en ella que la superficie del sector de círculo OAM es más grande que la del triángulo OMP y más pequeña que la del triángulo grande OAT:

$$\text{triángulo OMP} < \text{superficie sector OAM} < \text{triángulo OAT},$$

es decir

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{OP} \cdot \mathrm{MP} < \frac{1}{2}\,\mathrm{R}^2 \cdot x < \frac{1}{2}\,\mathrm{OA} \cdot \mathrm{AT}$$

es decir

$$\cos x \cdot \operatorname{sen} x < 1 \cdot x < 1 \cdot \operatorname{tg} x,$$

dividamos por sen x, que no es nulo:

$$\cos x < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$$

o bien

$$\cos x < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Pasemos al límite: si x tiende a 0, cos x tiende a 1, siendo entonces los dos términos extremos iguales a 1. Por tanto, $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$, que está constantemente comprendido *entre* dos límites que tienden cada uno a 1, valdrá también 1. Lo mismo ocurre para la relación inversa:

$$\boxed{\text{límite de } \frac{\operatorname{sen} x}{x \to 0} = 1}$$

Por otra parte, observando la figura se obseva claramente que la longitud del arco MA tiende a hacerse igual al seno MP, de aquí que esta fracción tienda hacia la unidad.

1.º **Derivada de** $\boxed{y = \operatorname{sen} x}$

Demos a x un incremento Δx; y varía, tomando el valor:

$$y_1 = y + \Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x),$$

la variación de y es, pues,

$$\Delta y = y_1 - y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x.$$

Transformemos esta diferencia de dos senos en producto mediante las fórmulas de transformación. Se sabe que:

$$\operatorname{sen}(a + b) - \operatorname{sen}(a - b) = 2 \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

con

$$a + b = x + \Delta x$$
$$a - b = x$$

de donde se deduce

$$a = x + \frac{\Delta x}{2} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{\Delta x}{2}.$$

Por tanto

$$\Delta y = 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

y se tendrá

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \operatorname{sen} \dfrac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \dfrac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x}.$$

Dividiendo por 2 arriba y abajo:

$$= \frac{\operatorname{sen} \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Pasemos al límite: si Δx tiende a 0, igual ocurrirá para Δy, teniéndose en el límite (al final de este capítulo demostraremos que el límite del producto de dos factores es igual al producto de los límites de cada factor):

$$\lim \text{ de } \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0} = \lim \left(\frac{\operatorname{sen} \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \right) \cdot \lim \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Ahora bien, se ha visto ya que la relación del seno de un arco a este arco tiene a 1 cuando el arco tiende a 0, por lo que en el límite, haciendo $\Delta x = 0$, se tendrá:

$$y' = 1 \cdot \cos (x + 0)$$

$$\boxed{y' = \cos x}$$

2.° **Derivada de** $\boxed{y = \cos x}$. — Dando x un incremento Δx, y pasará a valer:

$$y_1 = y + \Delta y = \cos (x + \Delta x),$$

por lo que la variación de y es:

$$\Delta y = y_1 - y = \cos (x + \Delta x) - \cos x.$$

Transformemos esta diferencia en producto. Sabemos que

$$\cos (a + b) - \cos (a - b) = -2 \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b.$$

Pongamos

$$\left| \begin{array}{l} a + b = x + \Delta x \\ a - b = x \end{array} \right.$$

de donde se saca

$$a = x + \frac{\Delta x}{2} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{\Delta x}{2}.$$

Por tanto

$$\Delta y = -2 \operatorname{sen} \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}$$

teniéndose, pues

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \operatorname{sen} \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x},$$

y dividiendo por 2 arriba y abajo

$$= -\operatorname{sen} \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Pasemos al límite: si Δx tiende a 0, también lo hará Δy, por lo que, como antes, tenemos:

$$\text{límite} \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0} = \lim \left[-\operatorname{sen} \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \cdot \lim \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right).$$

Haciendo $\Delta x = 0$, puesto que este último límite es igual a 1, queda:

$$y' = -\operatorname{sen} x \cdot 1$$

$$\boxed{y' = -\operatorname{sen} x}$$

3.º **Derivada de** $\boxed{y = \operatorname{tg} x}$. — Incrementando x en Δx, y tomará el valor y_1:

$$y_1 = y + \Delta y = \operatorname{tg} (x + \Delta x).$$

Siendo el incremento de y, por tanto

$$\Delta y = y_1 - y = \operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x.$$

Pero sabemos que

$$\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} r = \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} - \frac{\operatorname{sen} r}{\cos r} = \frac{\operatorname{sen} p \cdot \cos r - \operatorname{sen} r \cdot \cos p}{\cos p \cdot \cos r} = \frac{\operatorname{sen}(p - r)}{\cos p \cdot \cos r}$$

Escribamos entonces

$$p = x + \Delta x \qquad \text{y} \qquad r = x.$$

Se tendrá:

$$\Delta y = \operatorname{tg} p - \operatorname{tg} r = \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x - x)}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x} = \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x}.$$

Hagamos el cociente de los dos incrementos, dividiendo el numerador por Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x}.$$

Si ahora Δx tiende a 0, también lo hará Δy, siendo en el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \right)}{\lim [\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x]}$$

el numerador tiende a 1 y queda, haciendo $\Delta x = 0$

$$= \frac{1}{\cos x \cdot \cos x}$$

así pues

$$\boxed{y' = \frac{1}{\cos^2 x}} \qquad \text{o bien} \qquad \boxed{y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

En el próximo capítulo veremos una demostración más sencilla.

29. ESTUDIO DE LOS LIMITES

En todos los cálculos precedentes hemos tenido que tomar diferentes límites, el límite de un producto de dos factores, el de un cociente, etc.

Así pues, se trata de demostrar *rigurosamente* a qué son iguales tales límites.

Los resultados son evidentes *a priori,* pero, sin embargo, es necesario precisarlos, y los teoremas que vamos a estudiar tienen, además, *la ventaja de obligar al alumno a precisar, por fórmulas, ciertas nociones que parecen vagas:* por esta razón son instructivos y merece la pena estudiarlos. Su lectura no es, no obstante, obligatoria en un primer estudio.

Demostraremos ahora los siguientes teoremas:

TEOREMA I. — *El límite de una suma de varios términos es igual a la suma de los límites de cada término.*

TEOREMA II. — *El límite de un producto de varios factores es igual al producto de los límites de cada factor.*

TEOREMA III. — *El límite de un cociente es igual al cociente de los límites de cada factor.*

TEOREMA IV. — *El límite de la potencia m de un número variable es igual a la potencia m del límite de este número.*

Demostraciones: Sean dos cantidades y_1 e y_2, dependientes de la variable x y que tienden hacia los límites A_1 y A_2 cuando x tiende a un límite cualquiera x_1 (que no es forzosamente 0), es decir que se puede escribir

$$x = x_1 + \Delta x \qquad (\Delta x \to 0)$$

Se escribirá pues

$$\left| \begin{array}{l} y_1 = A_1 + \Delta y_1 \\ y_2 = A_2 + \Delta y_2 \end{array} \right.$$

donde Δy_1, Δy_2 *tienden a* 0 *al mismo tiempo que* Δx.

TEOREMA I. — Para una suma se tendrá

$$\begin{aligned} S = y_1 + y_2 &= (A_1 + \Delta y_1) + (A_2 + \Delta y_2) \\ &= (A_1 + A_2) + (\Delta y_1 + \Delta y_2) \end{aligned}$$

es decir que, si Δy_1 y Δy_2 tienden a 0, queda

$$\begin{aligned} \text{límite de } S &= A_1 + A_2 \\ &= \Sigma \text{ de los límites de cada término,} \end{aligned}$$ c.q.d.

TEOREMA II. — Para un producto se tendrá

$$y_1 \cdot y_2 = (A_1 + \Delta y_1) \cdot (A_2 + \Delta y_2) = A_1 A_2 + (A_2 \cdot \Delta y_1 + A_1 \cdot \Delta y_2 + \Delta y_1 \cdot \Delta y_2)$$

y, en el límite

límite del producto $y_1 \cdot y_2 = A_1 \cdot A_2$ = producto de los límites de cada factor c.q.d.

TEOREMA III. — Análogamente, para un cociente será

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{A_1 + \Delta y_1}{A_2 + \Delta y_2}.$$

Hagamos la diferencia

$$\frac{y_1}{y_2} - \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1 + \Delta y_1}{A_2 + \Delta y_2} - \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2 \cdot \Delta y_1 - A_1 \cdot \Delta y_2}{A_2(A_2 + \Delta y_2)} = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{1}{y_2} (A_2 \cdot \Delta y_1 - A_1 \cdot \Delta y_2)$$

de donde

$$\text{límite}\left(\frac{y_1}{y_2} - \frac{A_1}{A_2}\right) = \text{límite}\left[\frac{1}{A_2} \cdot \frac{1}{y_2} (A_2 \cdot \Delta y_1 - A_1 \cdot \Delta y_2)\right]$$

pero como Δy_1 y $\Delta y_2 \to 0$, $y_2 \to A_2$, y el paréntesis tiende a 0; por tanto

$$\text{lím}\left(\frac{y_1}{y_2} - \frac{A_1}{A_2}\right) \to 0,$$

y como consecuencia

$$\frac{y_1}{y_2} \to \frac{A_1}{A_2}.$$ c.q.d.

El teorema IV se demostraría de una manera idéntica.

CAPITULO V

CALCULO DE LAS DERIVADAS DE LAS NUEVAS FUNCIONES

30. Derivada de la función exponencial $\boxed{y = a^x}$. — Sea

$$y = a^x.$$

Dando a x un incremento Δx, y se convertirá en

$$y_1 = y + \Delta y$$

donde

$$y_1 = a^{x+\Delta x} = a^x \cdot a^{\Delta x},$$

la variación de y es, pues,

$$\begin{aligned} \Delta y = y_1 - y &= a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x \\ &= a^x(a^{\Delta x} - 1). \end{aligned}$$

Calculemos el cociente de los dos incrementos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x \cdot (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

Si $\Delta x \to 0$, $a^{\Delta x} \to 1$ y se tendrá $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{0}$, que es una indeterminación. Para deshacerla pongamos, puesto que $(a^{\Delta x} - 1) \to 0$:

$$a^{\Delta x} - 1 = \frac{1}{m} \qquad \text{(donde } m \text{ tiende a infinito)}$$

$$a^{\Delta x} = \frac{1}{m} + 1$$

y, tomando logaritmos neperianos:

$$\operatorname{Log}(a^{\Delta x}) = \Delta x \cdot \operatorname{Log} a = \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

de donde se dedude

$$\Delta x = \frac{\text{Log}\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\text{Log}\, a}.$$

Se tendrá según esto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x \cdot \frac{1}{m} \cdot \text{Log}\, a}{\text{Log}\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = \frac{a^x \cdot \text{Log}\, a}{m \cdot \text{Log}\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = \frac{a^x \cdot \text{Log}\, a}{\text{Log}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}.$$

Pero al principio de este libro se ha visto, al estudiar la función exponencial y los intereses compuestos, que, si m tiende a infinito, se verifica

$$\text{límite}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e.$$

— Repetimos que la demostración *riguosa* será hecha después del estudio de los desarrollos en serie, en el Tomo II (§ 4).

— Como $\text{Log}\, e = 1$, queda

$$\text{lím}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x \cdot \text{Log}\, a}{1}$$

$$\boxed{y' = a^x \cdot \text{Log}\, a}$$

— *Caso particular:* $y = e^x$.

Se tendría

$$y' = e^x \cdot \text{Log}\, e \qquad \text{(pero como } \text{Log}\, e = 1\text{)}$$

será

$$\boxed{y' = e^x}$$

Así, la derivada de e^x es la misma expresión. Es la única función de las matemáticas que es igual a la derivada.

31. Derivada de la función logarítmica $\boxed{y = \text{Log}\, x}$. — Sea:

$$y = \text{Log}\, x.$$

Incrementando x en Δx, y valdrá

$$y_1 = y + \Delta y = \text{Log}\,(x + \Delta x),$$

siendo, pues, el incremento de y

$$\Delta y = y_1 - y = \text{Log}\,(x + \Delta x) - \text{Log}\,x$$
$$= \text{Log}\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \text{Log}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

y se tendrá

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Log}\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Si $\Delta x \to 0$, quedará $\dfrac{\text{Log}\,1}{0} = \dfrac{0}{0}$; para deshacer la indeterminación haremos

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{m} \qquad \text{(donde } m \to \infty\text{)}$$

de donde

$$\Delta x = x \cdot \frac{1}{m},$$

obtenemos entonces, multiplicando por x arriba y abajo:

$$\frac{\Delta x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x\,\text{Log}\left(x + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x}\text{Log}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x} \cdot m\,\text{Log}\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{x} \cdot \text{Log}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Si ahora $\Delta x \to 0$, también Δy, m tiende a infinito y se obtiene

$$\text{límite}\,\frac{\Delta y}{\Delta x \to 0} = \frac{1}{x} \cdot \text{lím}\left[\text{Log}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right] = \frac{1}{x} \cdot \text{Log}\,e = \frac{1}{x} \cdot 1$$

es decir

$$\boxed{y' = \frac{1}{x}}$$

32. Derivadas de las líneas trigonométricas inversas. — Como derivadas fundamentales sólo nos quedan ya por calcular las de arc sen x, arc cos x y arc tg x; lo cual se puede hacer mediante un pequeño artificio.

Sea una función $y = f(x)$; se puede decir también que x es una función de y, es decir la función inversa;

$$x = \varphi(y).$$

Si x varía una cantidad Δx, y lo hará y, pudiéndose escribir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Pasemos al límite: Si Δx tiende a 0, también lo hará Δy y se tendrá

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

es decir que

$$y_x' = \frac{1}{x_y'}$$

de donde

$$\boxed{x_y' = \frac{1}{y_x'}}$$

La derivada de la función inversa es igual a la inversa de la derivada de la función.

Apliquemos ahora esta fórmula a las tres funciones: arc sen x, arc cos x y arc tg x.

33. Derivada de $\boxed{y = \text{arc sen } x}$. — Partamos de la función

$$y = \text{sen } x \quad \text{de donde} \quad y' = \cos x.$$

De aquí se deduce

$$x = \text{arc sen } y$$

por tanto

$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Pero, a fin de ceñirnos a la costumbre, que consiste *en llamar x a la variable e y a la función,* escribiremos:

$$y = \operatorname{arc\,sen} x$$

de donde, invirtiendo las letras

$$\boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

34. Derivada de $\boxed{y = \arccos x}$.

Partamos de

$$y = \cos x \qquad \text{de donde} \qquad y' = -\operatorname{sen} x$$

de donde se deduce

$$x = \arccos y$$

y por tanto

$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{-\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Invirtiendo las letras

$$y = \arccos x \qquad \text{y} \qquad \boxed{y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

35. Derivada de $\boxed{y = \operatorname{arc\,tg} x}$. — Partamos de la función

$$y = \operatorname{tg} x \qquad \text{de donde} \qquad y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Se deduce, pues

$$x = \operatorname{arc\,tg} x$$

y por tanto

$$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Lo mismo que antes, invirtiendo las letras, escribiremos:

$$y = \operatorname{arc\,tg} x$$

y también

$$\boxed{y' = \frac{1}{1 + x^2}}$$

NOTA. — Todas estas derivadas nos servirán después para trazar las curvas de variaciones de las tres funciones arc sen x, arc cos x y arc tg x.

36. Derivada de una suma. — Sea

$$y = u + v + w$$

suponemos aquí tres términos, pero podría haber dos o más.

Demos a x un incremento Δx:

u varía y se convierte en $u_1 = u + \Delta u$
v » » $v_1 = v + \Delta v$
w » » $w_1 = w + \Delta w$
y » » $y_1 = y + \Delta y$.

El nuevo valor de y será la suma de los nuevos valores:

$$y_1 = u_1 + v_1 + w_1.$$

La variación de y es pues

$$\begin{aligned}\Delta y = y_1 - y &= (u_1 + v_1 + w_1) - (u + v + w)\\ &= (u + \Delta u + v + \Delta v + w + \Delta w) - (u + v + w)\\ &= \Delta v + \Delta v + \Delta w,\end{aligned}$$

lo que era evidente *a priori*: la variación del todo es, evidentemente, igual a la suma algebraica de las variaciones de cada parte.

Hagamos el cociente de los dos incrementos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v + \Delta w}{\Delta x}.$$

Si Δx tiende a 0, igual ocurrirá para Δu, Δv, Δw y Δy. Se tendrá, pues, para el límite de esta suma, la suma de los límites de cada término, según un teorema visto:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0} = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x \to 0} + \lim \frac{\Delta v}{\Delta x \to 0} + \lim \frac{\Delta w}{\Delta x \to 0}$$

lo que da, según la propia definición de las derivadas:

$$\boxed{y' = u' + v' + w'}$$

La derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas de cada sumando. — Igual ocurre para una diferencia.

Ejemplos. — 1.° $y = ax^2 + bx + c.$

se tendrá $y' = 2ax + b + 0 = 2ax + b.$

2.° $$y = \frac{1}{x} - 2\sqrt{x}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

37. Derivada de un producto $\boxed{y = u \cdot v}$. — u y v son funciones de x, por ejemplo

$$y = (3x^2 - 1) \cdot (2 + 5x)$$

o también

$$y = \operatorname{sen} x \cdot e^{2x}, \qquad \text{etc.}$$

Demos a x un incremento Δx:

u varía, convirtiéndose en $u_1 = u + \Delta u$
v » » $v_1 = v + \Delta v$
y » » $y_1 = y + \Delta y,$

siendo todos estos Δ desconocidos (positivos o negativos).

El nuevo valor de y es, pues, el producto de los nuevos valores de u y de v:

$$y_1 \quad \text{o bien} \quad y + \Delta y = u_1 \cdot v_1$$

siendo la variación de y

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_1 - y = u_1 \cdot v_1 - u \cdot v \\ &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v \\ &= u \cdot v + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v \\ &= v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v \end{aligned}$$

se tendrá pues

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Pasemos al límite: si Δx tiende a 0, así ocurrirá también para Δu, Δv y Δy, y tendremos (aplicando los teoremas relativos a los límites):

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0} = \lim \left(v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) + \lim \left(u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) + \lim \Delta u \cdot \lim \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$= v \cdot \lim \frac{\Delta u}{\Delta x \to 0} + u \cdot \lim \frac{\Delta v}{\Delta x \to 0} + 0 \cdot \lim \frac{\Delta v}{\Delta x \to 0}$$

o bien

$$\boxed{y' = v \cdot u' + u \cdot v'}$$

Ejemplos:

1.° $y = (3x^3 - 1)(2 + 5x)$
$= u \cdot v$ con $\begin{cases} u = 3x^3 - 1 \\ v = 2 + 5x \\ u' = 6x \\ v' = 5. \end{cases}$

Tendremos entonces

$$y' = (2 + 5x)6x + (3x^3 - 1)5$$
$$= 30x^2 + 12x + 15x^2 - 5$$
$$= 45x^2 + 12x - 5.$$

2.° $y = e^x \cdot \operatorname{sen} x$
$= u \cdot v$ con $\begin{cases} u = e^x \\ v = \operatorname{sen} x \\ u' = e^x \\ v' = \cos x \end{cases}$

Tendremos entonces

$$y' = vu' + uv' = \operatorname{sen} x \cdot e^x + e^x \cdot \cos x$$
$$= e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)$$

3.° $y = \operatorname{Log} x \cdot \operatorname{arc\,tg} x$
$= u \cdot v$ con $\begin{cases} u = \operatorname{Log} x \\ v = \operatorname{arc\,tg} x \\ u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = \dfrac{1}{1 + x^2}. \end{cases}$

Tendremos pues

$$y' = \operatorname{arc\,tg} x \cdot \frac{1}{x} + \operatorname{Log} x \cdot \frac{1}{1 + x^2}.$$

38. Derivada de un cociente $\boxed{y = \frac{u}{v}}$. — Se trata de un cociente de dos funciones de x, por ejemplo

$$y = \frac{3x^2 - 1}{4x^3 - 5x}$$

o también

$$y = \frac{\text{Log } x}{\text{arc sen } x}, \qquad \text{etc.}$$

Demos a x un incremento Δx:

u varía, valiendo ahora $u_1 = u + \Delta u$

v » » $v_1 = v + \Delta v$

y » » $y_1 = y + \Delta y$.

El nuevo valor de y será el cociente de los nuevos valores de u y de v:

$$y_1 = \frac{u_1}{v_1} = y + \Delta y$$

siendo la variación de y:

$$\Delta y = y_1 - y = \frac{u_1}{v_1} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)}$$

el producto $u \cdot v$ desaparece en el numerador y queda

$$\Delta y = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v^2 + v \cdot \Delta v}.$$

Hagamos el cociente de los dos incrementos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \Delta v}.$$

Si ahora Δx tiende a 0, también lo harán Δu, Δv, y Δy, obteniéndose en el límite (aplicando los teoremas relativos a los límites):

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0} = \frac{\lim \left[v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right]}{\lim (v^2 + v \cdot \Delta v)}$$

$$= \frac{v \cdot \lim \frac{\Delta u}{\Delta x \to 0} - u \cdot \lim \frac{\Delta v}{\Delta x \to 0}}{v^2 + v \cdot \lim \Delta v} = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2 + v \cdot 0}$$

Se tendrá, pues, en el límite:

$$\boxed{y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}}$$

Ejemplos:

1.º $\quad y = \dfrac{3x^2 - 1}{4x^3 - 5x} = \dfrac{u}{v}$ $\quad$ con $\quad \begin{cases} u = 3x^2 - 1 \\ v = 4x^3 - 5x \\ u' = 6x \\ v' = 12x^2 - 5. \end{cases}$

La fórmula recién hallada de:

$$y' = \frac{(4x^3 - 5x)6x - (3x^2 - 1)(12x^2 - 5)}{(4x^3 - 5x)^2}$$

$$= \frac{24x^4 - 30x^2 - 36x^4 + 12x^2 + 15x^2 - 5}{v^2}$$

$$= \frac{-12x^4 - 3x^2 - 5}{(4x^3 - 5x)^2}.$$

2.º $\quad y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{u}{v}$ $\quad$ con $\quad \begin{cases} u = \operatorname{sen} x \\ v = \cos x \\ u' = \cos x \\ v' = -\operatorname{sen} x. \end{cases}$

Tendremos:

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{o bien} \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Se vuelve a encontrar, así, la fórmula que se había hallado directamente.

3.° $y = \dfrac{e^x}{\operatorname{Log} x}$ con $\begin{cases} u = e^x & u' = e^x \\ v = \operatorname{Log} x & v' = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Se tendrá

$$y' = \frac{\operatorname{Log} x \cdot e^x - e^x \cdot \dfrac{1}{x}}{(\operatorname{Log} x)^2} = e^x \cdot \frac{\operatorname{Log} x - \dfrac{1}{x}}{(\operatorname{Log} x)^2}$$

$$= e^x \left[\frac{1}{\operatorname{Log} x} - \frac{1}{x \cdot (\operatorname{Log} x)^2} \right].$$

CAPITULO VI

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES DE FUNCION

39. Función. —Una función de función se presenta bajo la forma

$$y = f(u)$$

donde u es una función de x:

$$u = \varphi(x),$$

x es la única variable, y u es una función intermedia *que se deberá encontrar de por sí cada vez.* La función y está ligada a la variable x por intermedio de u.

— He aquí algunos ejemplos de funciones de función:

— el peso P de un cilindro es una función de su volumen V (es decir, *u en la fórmula anterior*), y su volumen V es una función de su radio R (o sea, x),

$$P = f(V) \quad \text{y} \quad V = \varphi(R).$$

— La potencia eléctrica transformada en calor en una resistencia, es decir P vatios, es una función de la corriente I absorbida (o sea u), y esta corriente I es función de la resistencia R (es decir x), $P = f(I)$ *e* $I = \varphi(R)$.

Igualmente:

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{u} \qquad \text{con} \qquad u = \operatorname{sen} x.$$

$$y = \sqrt{\cos x} = \sqrt{u} \qquad \text{con} \qquad u = \cos x$$

$$y = (4x^2 - 1)^3 = u^3 \qquad \text{con} \qquad u = 4x^2 - 1.$$

— *Se trata de calcular la derivada de y con relación a x.*

— Demos a x un incremento Δx; entonces u varía una cantidad Δu e y varía Δy, pudiéndose escribir, después de multiplicar arriba y abajo por Δu:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y \cdot \Delta u}{\Delta x \cdot \Delta u} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Si ahora Δx tiende a 0, lo mismo ocurre para Δu y Δy, teniéndose en el límite:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta u \to 0} \cdot \lim \frac{\Delta u}{\Delta x \to 0}.$$

— Pero, por definición de derivada, el primer factor del segundo miembro es *la derivada de y respecto de u* (donde u se considera como variable), mientras que el segundo es *la derivada de u respecto de x* (donde x es la variable). Se obtiene así la fórmula fundamental:

$$\boxed{y_x' = y_u' \cdot u_x'}$$

Puede que el lector no haya comprendido mucho de estas explicaciones teóricas, *pero deberá tranquilizarse, porque lo comprenderá en seguida mediante nuestros ejemplos detallados*: primeramente es preciso encontrar u, después se calcula u', y se aplica la fórmula anteriormente obtenida.

— Desde el punto de vista práctico, es importante no mezclar los cálculos principales con los auxiliares relacionados con u y u'; por esta razón escribiremos los cálculos auxiliares a la derecha de la página.

— Más tarde, con un poco de costumbre, el lector *deberá prescindir* de escribir estos cálculos auxiliares, sacando el resultado haciendo un pequeño cálculo mental. Es un mecanismo muy simple de adquirir y cuyo principio es éste: para encontrar lo que se debe llamar u, el lector deberá esforzarse en poner y bajo la forma de una función simple, *de la cual se pueda conocer inmediatamente la derivada*: por ejemplo una potencia, una raíz, la inversa de un número, un logaritmo, una exponencial, un seno, un coseno, una tangente, etc.

El cálculo de la derivada de una función de función es *cuestión de práctica*; el lector no debe atemorizarse, sino ejercitarse en los próximos ejemplos.

Ejemplos:

1.° Sea:

$$y = (3x^2 - 1)^4.$$

Es una función de función, la cuarta potencia de un paréntesis que llamaremos u:

$$y = u^4 \qquad \text{con} \qquad u = 3x^2 - 1$$

de donde

$$u_x' = 6x.$$

Se tendrá:

$$y_x' = y_u' \cdot u_x'.$$

Pero la derivada de y con relación a u (es decir, la derivada de u^4) es $4u^3$; tendremos pues

$$y_x' = 4u^3 \cdot u' = 4u^3 \cdot 6x = 4(3x^2 - 1)^3 \cdot 6x = 24x(3x^2 - 1)^3.$$

2.° Sea

$$y = \sqrt{2x - 5}.$$

Tratándose de una raíz cuadrada, llamemos u a la cantidad subradical:

$$y = \sqrt{u} \qquad \text{con} \qquad u = 2x - 5$$

y entonces

$$u' = 2.$$

Se tendrá:

$$y' = y'_u \cdot u'_x$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{2x - 5}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x - 5}}.$$

3.° Sea

$$y = \operatorname{sen} 4x.$$

Llamemos

$$y = \operatorname{sen} u \qquad \text{con} \qquad u = 4x \qquad \text{y} \qquad u' = 4$$

y como la derivada de y respecto de u es $\cos u$, tendremos:

$$y' = y_u' \cdot u' = \cos u \cdot 4 = 4 \cos 4x.$$

4.° Sea

$$y = \frac{1}{\cos x}.$$

Es de la forma $y = \frac{1}{u}$ — con $\begin{cases} u = \cos x \\ u' = -\operatorname{sen} x. \end{cases}$

Por tanto $$y' = -\frac{1}{u^2} \cdot u' = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}.$$

5.° Sea

$$y = \operatorname{sen}^2 x.$$

Antes de ver que esta función es un seno, *es preciso notar que es un cuadrado*:

$$y = u^2 \quad \text{con} \quad u = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad u' = \cos x.$$

Tendremos pues:

$$y' = y_u' \cdot u'$$

y como la derivada de $y = u^2$ *respecto de* u es $2u$, será:

$$y' = 2u \cdot u' = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen} 2x.$$

Del mismo modo, sea

$$y = \operatorname{sen}^3 x = u^3$$

se tendría

$$y' = 3u^2 \cdot u' = 3 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x.$$

6.°

$$y = e^{-3x}.$$

Es una exponencial de la forma e^u,

$$y = e^u \quad \text{con} \quad u = -3x \quad \text{por tanto} \quad u' = -3.$$

Tendremos, por consiguiente, puesto que la derivada de y con respecto a u es e^u;

$$y' = y_u' \cdot u' = e^u \cdot u' = e^{-3x}(-3) = -3e^{-3x}.$$

7.°

$$y = \operatorname{Log}(1 - 4x).$$

Puesto que se trata de un logaritmo, pongamos

$$y = \operatorname{Log} u \quad \text{con} \quad u = 1 - 4x \quad \text{luego} \quad u' = -4$$

de donde $y' = y_u' \cdot u_x'$

y como la derivada de $y = \text{Log } u$ *respecto a* u *es* $\frac{1}{u}$, será

$$y' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{-4}{1-4x}.$$

8.° $y = \text{tg}\,\frac{1}{x}.$

Pondremos

$$y = \text{tg}\, u \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} u = \dfrac{1}{x} \\ u' = -\dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Entonces $y' = y_u' \cdot u_x'$

y como la derivada y_u' de $\text{tg}\, u$ es $\frac{1}{\cos^2 u}$, tendremos

$$y' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2 \cdot \cos^2 \frac{1}{x}}.$$

9.° $y = \dfrac{1}{C\omega} = f(C).$

Pondremos

$$y = \frac{1}{u} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} u = C\omega \\ u' = \omega \end{cases}$$

luego

$$y' = -\frac{1}{u^2} \cdot u' = -\frac{1}{C^2\omega^2} \cdot \omega = -\frac{1}{C^2\omega}.$$

10. $y = \dfrac{S}{4\pi e} = f(e).$

Pondremos

$$y = \frac{S}{u} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} u = 4\pi e \\ u' = 4\pi \end{cases}$$

luego

$$y' = -\frac{S}{u^2} \cdot u' = -\frac{S}{16\pi^2 e^2} \cdot 4\pi = -\frac{S}{4\pi e^2}$$

40. Cuadro resumido de las derivadas fundamentales
(apréndase de memoria)

Funciones simples	Derivadas	Funciones de función	Derivadas
$y = x$	$y' = 1$	$y = u$	$y' = u'$
$y = ax$	$y' = a$	$y = a \cdot u$	$y' = a \cdot u'$
$y = x^m$	$y' = mx^{m-1}$	$y = u^m$	$y' = m \cdot u^{m-1} \cdot u'$
$y = ax^m$	$y' = m \cdot ax^{m-1}$	$y = a \cdot u^m$	$y' = m \cdot au^{m-1} \cdot u'$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
$y = \frac{a}{x}$	$y' = -\frac{a}{x^2}$	$y = \frac{a}{u}$	$y' = -\frac{a}{u^2} \cdot u'$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$y = a \cdot \sqrt{x}$	$y' = \frac{a}{2\sqrt{x}}$	$y = a\sqrt{u}$	$y' = \frac{a}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$	$y = \operatorname{sen} u$	$y' = \cos u \cdot u'$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$	$y = \cos u$	$y' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$y = \operatorname{tg} u$	$y' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \operatorname{Log} a$	$y = a^u$	$y' = a^u \cdot \operatorname{Log} a \cdot u'$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$
$y = \operatorname{Log} x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \operatorname{Log} u$	$y' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$y = \operatorname{ar\,sen} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = \operatorname{arc\,sen} u$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
$y = \operatorname{ar\,cos} x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = \operatorname{arc\,cos} u$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
$y = \operatorname{ar\,tg} x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$	$y = \operatorname{arc\,tg} u$	$y' = \frac{1}{1 + u^2} \cdot u'$
		$y = u + v + w$	$y' = u' + v' + w'$
		$y = u \cdot v$	$y' = vu' + uv'$
		$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

41. Generalización de la derivada de las funciones de función. — Sea $y = f(u)$, donde u es una función de v

$$u = \varphi(v),$$

donde v es una función de z

$$v = g(z),$$

donde z es una función de t

$$z = h(t)$$

donde el mismo t es una función de la variable x

$$t = j(x).$$

x es la única variable; y es la función, mientras que u, v, z, t son funciones intermedias que relacionan x con y (las cuales, además, será preciso hallar cada vez).

Se dice que y es una función de función generalizada: y está relacionada con x por intermedio de u, de v, de z, etc.; podría haber asimismo más funciones intermedias (o bien menos).

— Daremos, contrariamente a la costumbre, y para que el lector comprenda bien, una analogía comercial: y es, por ejemplo, el fabricante de un objeto, x es el comprador al detalle; u, v, z, t son los intermediarios. Son todos solidarios los unos de los otros, y el fabricante y está ligado al comprador al detalle x por todos estos intermediarios.

— Si x varía Δx:

t	varía,	transformándose en	$t_1 = t + \Delta t$
z	»	»	$z_1 = z + \Delta z$
v	»	»	$v_1 = v + \Delta v$
u	»	»	$u_1 = u + \Delta u$
y	»	»	$y_1 = y + \Delta y.$

Calculemos la relación $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ y multipliquémosla arriba y abajo por el producto $\Delta u \cdot \Delta v \cdot \Delta z \cdot \Delta t$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y \cdot \Delta u \cdot \Delta v \cdot \Delta z \cdot \Delta t}{\Delta x \cdot \Delta u \cdot \Delta v \cdot \Delta z \cdot \Delta t}$$

que se escribirá:

$$= \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

lo que nada ha cambiado.

— Si ahora Δx tiende a 0, análogamente lo harán Δt, Δz, Δv, Δu y Δy y se tendrá, aplicando el teorema sobre el límite de un producto:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta u \to 0} \cdot \lim \frac{\Delta u}{\Delta v \to 0} \cdot \lim \frac{\Delta v}{\Delta z \to 0} \cdot \lim \frac{\Delta z}{\Delta t \to 0} \cdot \lim \frac{\Delta t}{\Delta x \to 0}$$

lo que da la fórmula fundamental:

$$\boxed{y_x' = y_u' \cdot u_v' \cdot v_z' \cdot z_t' \cdot t_x'}$$

La puesta en práctica la explicaremos mediante numerosos ejemplos, a fin de hacer comprender bien el mecanismo de los cálculos.

Ejemplos:

1.° Sea $y = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{x}$.

Tenemos $y = u^2$ con $\begin{cases} u = \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \operatorname{tg} v \\ v = \frac{1}{x} \\ u_v' = \frac{1}{\cos^2 v} \\ v_x' = -\frac{1}{x^2} \end{cases}$

luego

$$y_x' = y_u' \cdot u_v' \cdot v_x'$$

pero $y_u' = 2u$; y entonces

$$y_x' = 2u \cdot \frac{1}{\cos^2 v} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot 2 \operatorname{tg} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} = -\frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x^2 \cdot \cos^3 \frac{1}{x}}.$$

2.° Sea $y = \operatorname{Log} \sqrt{1 - 4x^2}$

Tenemos $y = \operatorname{Log} u$ con $\begin{cases} u = \sqrt{1 - 4x^2} = \sqrt{v} \\ v = 1 - 4x^2 \\ u_v' = \frac{1}{2\sqrt{v}} \\ v_x' = -8x \end{cases}$

luego

$$y_x' = y_u' \cdot u_v' \, v_x' = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} (-8x)$$

$$y_x' = -\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2} \cdot \sqrt{1-4x^2}} = -\frac{4x}{1-4x^2},$$

3.° Sea $y = \sqrt{(1-\operatorname{sen}^3 x)^3}$.

Tenemos $y = \sqrt{u}$ con

$$\begin{cases} u = (1-\operatorname{sen}^3 x)^3 \\ \quad = v^3 \\ v = 1-\operatorname{sen}^3 x = 1-z^3 \\ z = \operatorname{sen} x \\ u' = 3v^2 \\ v' = -3z^2 \quad \text{y} \quad z' = \cos x \end{cases}$$

luego $y' = y_u' \cdot u_v' \cdot v_z' \cdot z_x'$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 3v^2 \cdot 3z^2 \cdot \cos x$$

$$= -\frac{9}{2} \frac{(1-\operatorname{sen}^3 x)^2 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x}{\sqrt{(1-\operatorname{sen}^3 x)^3}} = -\frac{9}{2} \operatorname{sen}^2 x \cos x \cdot \sqrt{(1-\operatorname{sen}^3 x)}.$$

4.° Sea $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{1-4x^2}$.

Tenemos $y = \operatorname{arc\ tg}\ u$ con

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{1-4x^2} = \dfrac{1}{v} \\ v = 1-4x^2 \\ u' = -\dfrac{1}{v^2} \\ v' = -8x \end{cases}$$

así pues $y' = y_u' \cdot u_v' \cdot v_x'$.

Ahora bien, como la derivada de y respecto de u vale $y_u' = \dfrac{1}{1+u^2}$, tendremos

$$y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot \left(-\frac{1}{v^2}\right)(-8x)$$

$$= \frac{8x}{1+\left(\dfrac{1}{1-4x^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{(1-4x^2)^2} = \frac{8x(1-4x^2)^2}{(1-4x^2)^2+1} \cdot \frac{1}{(1-4x^2)^2}$$

$$= \frac{8x}{1+(1-4x^2)^2}.$$

5.° Sea $y = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = f(\omega)$

Tenemos $y = \sqrt{u}$ con $\begin{cases} u = R^2 + L^2\omega^2 \\ \quad = R^2 + v^2 \\ v = L\omega \\ u' = 0 + 2v \\ v' = L \end{cases}$

luego

$$y' = y_u' \cdot u_v' \cdot v_x'.$$

Y sustituyendo los valores de las derivadas:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2v \cdot L = \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cdot L\omega \cdot L = \frac{L^2\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

Se podría haber obtenido más rápidamente escribiendo

$$y = (R^2 + L^2x^2)^{1/2} = u^{1/2} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} u = R^2 + L^2x^2 \\ u' = 2L^2x \end{cases}$$

$$y' = \frac{1}{2}u^{-1/2} \cdot u'$$

$$= \frac{1}{2}(R^2 + L^2x^2)^{-1/2} \cdot 2L^2x = \frac{L^2x}{\sqrt{R^2 + L^2x^2}}.$$

6.° Sea $y = \dfrac{1}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{x\omega}\right)^2}} = f(x).$

Tenemos $y = \dfrac{1}{u}$ con $\begin{cases} u = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{x\omega}\right)^2} \\ \quad = \sqrt{v} \\ v = R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{x\omega}\right)^2 \\ \quad = R^2 + z^2 \\ z = L\omega - \dfrac{1}{x\omega} = L\omega - \dfrac{1}{t} \\ t = x\omega \\ u' = \dfrac{1}{2\sqrt{v}} \qquad v' = 2z \\ z' = +\dfrac{1}{t^2} \qquad t' = \omega. \end{cases}$

Por tanto $y' = y_u' \cdot u_v' \cdot v_z' \cdot z_t' \cdot t_x'$

$$= -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot 2z \cdot \frac{1}{t^2} \cdot \omega = \frac{-z\omega}{u^2 t^2 \sqrt{v}}$$

$$= \frac{-\left(L\omega - \frac{1}{x\omega}\right)\omega}{\left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{x\omega}\right)^2\right] \cdot x^2\omega^2 \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{x\omega}\right)^2}}$$

$$= -\frac{\left(L\omega - \frac{1}{x\omega}\right)}{\omega x^2 \left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{x\omega}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

7.° Sea $y = \operatorname{sen}^3 4x$.

Será $y = u^3$ con $\begin{cases} u = \operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen} v \\ v = 4x \\ u' = \cos v \\ v' = 4. \end{cases}$

de donde

$$y' = y_u' \cdot u_v' \cdot v'$$
$$= 3u^2 \cdot \cos v \cdot 4$$
$$= 12 \operatorname{sen}^2 4x \cdot \cos 4x.$$

8.° Sea $y = e^{\operatorname{sen} 2x}$.

Escribiremos $y = e^u$ con $\begin{cases} u = \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} v \\ v = 2x \\ u' = \cos v \quad \text{y} \quad v' = 2 \end{cases}$

42. Derivadas sucesivas. — Cuando se ha calculado la derivada y' de una función y, puede ocurrir que esta propia derivada sea también una función de x; puede entonces tomarse la derivada de esta derivada, es decir la segunda derivada, que se escribe y'' o también $f''(x)$, pronunciándose «*y segunda*» o bien «*f segunda de x*».

— Si se puede, se continuaría tomando la derivada de la derivada segunda, o sea la derivada tercera, que se escribe y''' o $f'''(x)$, pronunciándose «*y tercera*» o bien «*f tercera de x*».

Continuando, se obtendrá las derivadas cuarta, quinta, etc.

— Según el caso, estas derivadas acabarán automáticamente o bien continuarán indefinidamente.

— Más adelante veremos para qué sirven estas derivadas sucesivas.

Ejemplos:

1.° $y = 5x^4$
$y' = 20x^3$
$y'' = 60x^2$
$y''' = 120x$
$y'''' = 120$
$y''''' = 0$

2.° $y = 5x^{-4}$
$y' = -20x^{-5}$
$y'' = +100x^{-6}$
$y''' = -600x^{-7}$
..... etc.
aquí hay una sucesión infinita de derivadas.

3.° $y = \operatorname{sen} x$
$y' = \cos x$
$y'' = -\operatorname{sen} x$
$y''' = -\cos x$
$y'''' = \operatorname{sen} x = y$
$y''''' = \cos x = y'$
..... etc.
aquí habrá una sucesión infinita.

4.° $y = \operatorname{tg} x$
$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + u^2$
$y'' = 2u \cdot u' = 2 \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)$
$= 2 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg}^3 x$
$y''' = 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)$
$+ 6 \operatorname{tg}^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x)$
$= 6 \operatorname{tg}^4 x + 8 \operatorname{tg}^2 x + 2$
$y'''' = 24 \operatorname{tg}^3 x(1 + \operatorname{tg}^2 x)$
$+ 16 \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)$
$= 24 \operatorname{tg}^5 x + 40 \operatorname{tg}^3 x + 16 \operatorname{tg} x$
..... etc.

5.° $y = \operatorname{sen}^2 x = u^2$
$y' = 2uu' = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} v$
$y'' = \cos v \cdot v' = 2 \cos 2x$
$y''' = -4 \operatorname{sen} 2x$
$y''\cdot = -8 \cos 2x,$ etc.

6.º
$$\begin{aligned} y &= e^{-x} \cdot \operatorname{sen} x = u \cdot v \\ y' &= vu' + uv' = \operatorname{sen} x(-e^{-x}) + e^{-x} \cdot \cos x \\ &= e^{-x}(\cos x - \operatorname{sen} x) = u \cdot v \\ y'' &= (\cos x - \operatorname{sen} x)(-e^{-x}) + e^{-x}(-\operatorname{sen} x - \cos x). \\ &= e^{-x}(-2\cos x) = u \cdot v \\ y''' &= (-2\cos x)(-e^{-x}) + e^{-x}(+2\operatorname{sen} x) \\ &= 2e^{-x}(\cos x + \operatorname{sen} x), \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

7.º
$$y = \operatorname{Log}(x + \sqrt{1+x^2}) = \operatorname{Log} u$$

$$y' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$$

$$= (1+x^2)^{-1/2}$$

$$y'' = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-3/2}\,2x = -x(1+x^2)^{-3/2} = u \cdot v$$

$$y'' = (1+x^2)^{-3/2}(-1) - x\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x^2)^{-5/2} \cdot 2x,$$

$$= -(1+x^2)^{-3/2} + 3x^2(1+x^2)^{-5/2}, \qquad \text{etc.}$$

CAPITULO VII

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Vamos a ver que, gracias al conocimiento de una derivada, para un cierto valor de x se puede saber:

si una función crece o decrece, lenta o rápidamente,
si una función tiene un máximo o un mínimo,
si una curva, en un punto cualquiera, tiene su tangente horizontal, vertical o inclinada, lo que da la posición de la curva en este punto.
si una curva tiene su concavidad dirigida hacia arriba o hacia abajo,
si la curvatura en un punto es grande o pequeña, etc.

Por último y principalmente, gracias a la derivada, se podrá *fácilmente* trazar la curva que representa las variaciones de una función cualquiera.

— Debemos decir que la aplicación *más importante es la búsqueda de los máximos y mínimos.*

— Más adelante veremos un gran número de ejemplos, extraídos de la electricidad, de la mecánica o de la óptica, y en ese momento el lector se dará cuenta, *al fin,* de que las matemáticas superiores comienzan a ser útiles e interesantes.

PRIMERA APLICACION

43. Inclinación de una curva en un punto. — Anteriormente hemos visto cuál era la significación geométrica de la derivada:

$$y' = \operatorname{tg} \alpha$$

donde α es el ángulo de inclinación de la tangente geométrica a la la curva *en el punto considerado.*

Todas las aplicaciones de las derivadas utilizan esta propiedad.

— Hemos demostrado en este momento la regla siguiente:

REGLA. — *Si* y' *es* > 0 *el ángulo* α *es agudo*
si y' *es* < 0 *el ángulo* α *es obtuso.*

Es preciso, naturalmente, en la derivada, reemplazar x por la abscisa del punto considerado.

— De esta forma se deduce que:

si $y' = 0$ *se tiene* $\alpha = 0$ (o bien π)

y la tangente a la curva es horizontal.

si $y' = \infty$ *se tiene* $\alpha = \frac{\pi}{2}$

y la tangente a la curva es vertical, siendo la curva también vertical.

Ejemplos: 1.° Sea $y = \frac{1}{x}$ $y' = -\frac{1}{x^2}$

si	$x = 0$	$y' = -\infty$	la curva es vertical
si	$x = \infty$	$y' = 0$	la curva es horizontal
si	$x = -1$	$y' = -1 = \operatorname{tg} \alpha$,	de donde $\alpha = 135°$.

2.° ¿Bajo qué ángulo la curva $y = \frac{2x}{1 + x^2}$ corta al eje de las x?

Será

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{(1 + x^2) \cdot 2 - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2}.$$

$$= \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

La curva cortará al eje de las x en un punto tal que $y = 0$; es decir que

$$\frac{2x}{1 + x^2} = 0 \quad \text{de donde} \quad x = 0.$$

Llevemos este valor a la derivada:

$$y' = 2 = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{de donde} \quad \alpha \approx 64°$$

(el ángulo es de 64° si la escala de las x es la misma que la de las y).

3.° Sea $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$.

Derivando, obtenemos:

$$y' = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Para $x = \pm \infty$ $y' = 0$ la tangente a la curva es horizontal
» $x = 0$ $y' = \infty$ la tangente a la curva es vertical.

4.° La impedancia de un circuito eléctrico que comprende una bobina de inductancia (sin resistencia) en serie con un condensador es

$$Z = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

donde $\omega = 2\pi f$, siendo f la frecuencia.

—Más adelante, al final del capítulo IX, veremos que la curva $Z = f(\omega)$ tiene la forma de la figura 21, la cual tiene un punto P donde la impedancia es nula:

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \quad \text{o bien} \quad LC\omega^2 = 1, \quad \text{o sea que} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

es decir en la resonancia.

Calculemos tg α en este punto

$$\operatorname{tg}\alpha = Z' = L - \left(-\frac{1}{C^2\omega^2} \cdot C\right) = L + \frac{1}{C\omega^2},$$

reemplacemos ω^2 por su valor

$$Z' = \operatorname{tg}\alpha = L + \frac{1}{C\dfrac{1}{LC}} = 2L.$$

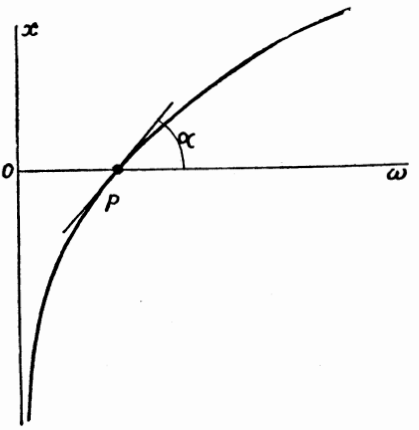

FIG. 21

Así, cuanto mayor es el valor de la inductancia, mayor será también el ángulo α. Pero, si α es grande, entonces la impedancia Z varía *muy rápidamente* a uno y otro lado de la resonancia, lo que hace que el circuito sea *muy selectivo*.

Se deduce así, por consideraciones matemáticas sencillas, que la selectividad del circuito es tanto mayor cuanto mayor es el valor de la inductancia L (es preciso, por tanto, un condensador de bajo valor).

SEGUNDA APLICACION

44. Crecimiento y decrecimiento de una función. — Teniendo siempre presente que la derivada de una función, en un punto cualquiera de la curva, es igual a tg α, se puede enunciar el teorema siguiente, consecuencia *inmediata* de este hecho, y cuya demostración es evidente geométricamente.

TEOREMA. — *Si la derivada es positiva, la función crece, y, si es negativa, la función decrece; e inversamente.*

En efecto, si $y' > 0$, el ángulo α es agudo, y crece, y si $y' < 0$, el ángulo α es obtuso, y decrece.

En el Tomo II (§ 10) daremos una demostración rigurosa, puramente algebraica y *sin ninguna figura,* de este teorema. Por el momento, contentémonos con la interpretación geométrica dada.

Ejemplos. — 1.° Sea

$$y = \frac{1}{x} \qquad y' = -\frac{1}{x^2}$$

siendo x^2 positivo, y' será *siempre* negativa; por tanto y decrece continuamente.

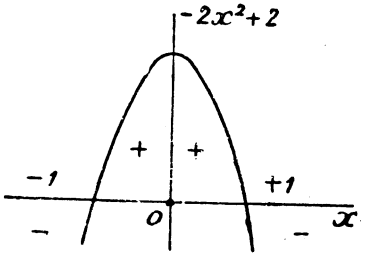

FIG. 22

2.° Sea

$$y = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

En el primer ejemplo del apartado anterior (43) se calculó y':

$$y' = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

La derivada tiene el signo del numerador

$$-2x^2 + 2;$$

se trata, pues, de un trinomio con a negativo, luego pasa por un máximo. Se anula para

$$-2x^2 + 2 = 0 \qquad x^2 = 1 \qquad \text{y} \qquad x = \pm 1$$

y este trinomio está representado por la curva de la figura 22: es, pues, positivo entre las raíces y negativo en el exterior. Se ve así que:

para	$x < -1$	$y' < 0$	por tanto y decrece,
para	$-1 > x < 1$	$y' > 0$	por tanto y crece,
y para	$x > 1$	$y' < 0$	por tanto y decrece.

3.° Sea

$$y = \sqrt[3]{x^2}.$$

Ya se encontró que $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

luego, si $x < 0$ será $y' < 0$ e y decrece (en efecto, la raíz cúbica de un número negativo es también *negativa*), mientras que si $x > 0$ será $y' > 0$ e y crecerá.

4.° En electricidad, la impedancia de un circuito que comprende una inductancia pura en serie con un condensador es

$$Z = L\omega - \frac{1}{C\omega},$$

En el apartado anterior (ejemplo 4.°) hemos calculado que la derivada respecto de ω vale

$$Z' = L + \frac{1}{C\omega^2}$$

la cual es siempre positiva. Esto quiere decir que *la impedancia* Z *crece indefinidamente cuando* ω *crece de* 0 *a infinito.*

5.° La capacidad de un condensador eléctrico es

$$C = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\varepsilon_r \frac{S}{e} = f(e).$$

donde e es el espesor del aislante, supuesto variable.

Calculemos la derivada C'

$$C' = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\varepsilon_r \cdot S\left(-\frac{1}{e^2}\right) = -8{,}85 \times 10^{-12}\varepsilon_r \frac{S}{e^2};$$

como esta cantidad es siempre negativa, la capacidad C decrece indefinidamente (cuando la variable e aumenta), lo cual era evidente.

6.° Sea la función $y = \operatorname{tg} x$. Tenemos

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \text{o bien} \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x,$$

como esta cantidad es siempre positiva, la función y es constantemente creciente.

TERCERA APLICACION

45. Búsqueda de los máximos y de los mínimos. — Desde el punto de vista del trazado de las curvas, así como de las aplicaciones prácticas, es útil saber si una función pasa por un máximo o por un míni-

mo. Tal caso será, por ejemplo, en la práctica, un máximo de corriente o de potencia eléctrica, un máximo de impedancia, de volumen, un mínimo de precio, de distancia, de tiempo, etc.

Para ello se utiliza el siguiente teorema fundamental.

TEOREMA. — *Cuando una función* $y = f(x)$ *pasa por un mínimo o por un máximo, su derivada se anula, cambiando de signo. Inversamente, si una derivada se anula (cambiando de signo), necesariamente la función y pasa por un máximo o por un mínimo.*

— Por el momento, no sabemos si se trata de un máximo o *bien* de un mínimo, pero indicaremos dos reglas (empleándose la una o la otra a voluntad) que permitirán resolver la duda.

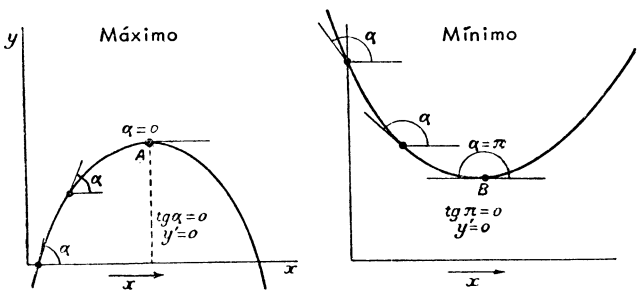

FIG. 23

— La demostración rigurosa y analítica (*sin ninguna figura*) no podemos darla aquí. Lo haremos con detalle en el Tomo II, §10, *tras* el estudio de la fórmula de TAYLOR, como debe hacerse.

— Sin embargo podemos ya, mediante una figura, dar *una demostración geométrica muy simple e intuitiva*, recordando que, en cada punto de una curva, la derivada es la pendiente de la tangente a la curva en ese punto:

$$y' = \operatorname{tg} \alpha.$$

— La figura 23 muestra una curva con un máximo y otra con un mínimo.

— Debe notarse que, desde el punto de vista estrictamente matemático, la curva representativa de un máximo o de un mínimo es redondeada y progresiva, siendo horizontal la tangente a la curva en dicho máximo o mínimo; las dos curvas de la figura 24, por ejemplo, no poseen ni máximo ni mínimo: se trata de puntos angulosos o de retroceso. Más adelante veremos ejemplos sobre esto.

— Sobre la figura 23 se ha representado, en diferentes puntos de la curva, el ángulo α que forma la tangente a la curva con el eje de las x; se ve así que:

en el caso de un *máximo*, α es nulo en el vértice, luego

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = 0$$

en el caso de un mínimo, vale π en el vértice, luego

$$\operatorname{tg} \pi = y' = 0.$$

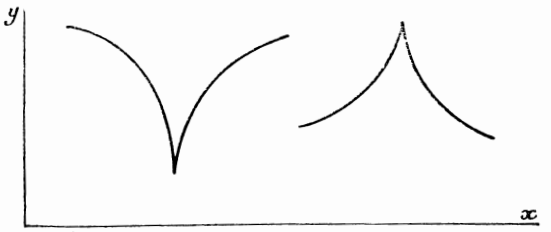

FIG. 24

El teorema está, pues, demostrado. Sin embargo es aún preciso demostrar que la derivada *debe cambiar de signo*, y pasar de + a —, o bien de — a +; veremos por qué.

— En el caso de un *máximo*, en A por ejemplo:

a la izquierda del punto A, y crece, luego y' es *positiva*,

a la derecha del punto A, y decrece, luego y' es *negativa*.

En el caso de un *mínimo*, caso B:

a la izquierda del punto B, y decrece, luego y' es *negativa*,

a la derecha del punto B, y crece, luego y' es *positiva*.

Vemos claramnete que y' debe cambiar de signo.

—¿Qué ocurriría si y', aun anulándose, no cambiara de signo (por ejemplo, que sea positiva antes y que quede positiva después)?

— Entonces, siendo nula la derivada en un cierto punto, la tangente a la curva en ese punto será horizontal; pero como la función y crece antes de este punto y también lo hace después de él, tendremos la figura 25, que muestra *un punto de inflexión, con tangente horizontal*, donde la curvatura de la curva cambia de lado. En la figu-

ra 26, y' se anula en P. Pero supongamos que, antes de este punto, y' sea negativa (por tanto y decrece), y que, después de este punto, y' continúe siendo negativa (luego y sigue decreciendo): tenemos de nuevo un punto de inflexión con tangente horizontal. *Pero en ambos casos no hay ni máximo ni mínimo.*

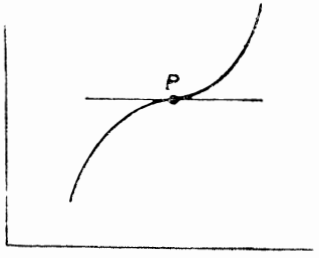

FIG. 25

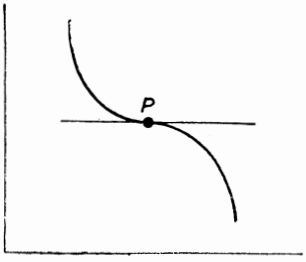

FIG. 26

— Se ve así que, en estos dos puntos P, la tangente a la curva *atraveisa* ésta.

— Hay también puntos de inflexión donde la tangente a la curva no es horizontal, sino inclinada. En este caso la derivada no es nula en el punto considerado, por lo que la cuestión no se plantea.

— *En resumen,* para que haya máximo o mínimo es preciso que la derivada se anule, *pero cambiando de signo.*

— En el número 48 veremos la manera de encontrar los puntos de inflexión.

— Se trata ahora de saber, cuando la derivada se anula (cambiando de signo), si se tiene un máximo o bien un mínimo. Para ello indicaremos dos reglas. Se empleará, a voluntad, una *u* otra, pero, en la mayoría de los casos, una de estas reglas será de *más fácil* aplicación que la otra.

46. Forma de distinguir si es máximo o mínimo.

Primera regla. — Se utiliza el teorema siguiente.

TEOREMA: *Si, anulándose una derivada para un cierto valor de x, esta derivada es primero positiva (y crece) y por encima de este valor de x se hace negativa (y decrece), tendremos entonces un máximo de y. Si, por el contrario, la derivada es primeramente negativa (y decrece) y por encima de dicho valor se hace positiva (y crece), se tendrá entonces un mínimo de y.*

Es necesario, pues, estudiar la función alrededor del punto en que la derivada se anula y ver cuál es el signo de esta derivada un poco antes y un poco después de dicho punto.

Ejemplos:

1.° Sea

$$y = x^2 - 5x + 6$$

$$y' = 2x - 5 = 0 \quad \text{de donde} \quad x = \frac{5}{2}.$$

Situémonos, pues, un poco antes y un poco después del valor $x = \frac{5}{2}$; y veamos cuál es el signo de y'.

Para $x < \frac{5}{2}$, por ejemplo cero, $y' < 0$, luego $y \searrow$,

Para $x > \frac{5}{2}$, por ejemplo $+3$, $y' > 0$, luego $y \nearrow$,

Así, y decrece primeramente y en seguida crece, teniéndose un mínimo de y.

2.° Sea

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}.$$

Que pondremos como

$$y = (1 - 4x^2)^{-1/2} = u^{-1/2}$$

$$y' = -\frac{1}{2} u^{-3/2} \cdot u' = -\frac{1}{2} (1 - 4x^2)^{-3/2} \cdot (-8x)$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{(1 - 4x^2)^3}} = 0 \quad \text{de donde} \quad 4x = 0 \quad \text{luego} \quad x = 0.$$

Hagamos notar que, para $x = 0$, el denominador se reduce a 1, siendo por tanto real; este valor de x puede, pues, convenir.

— Ahora bien, hay que ver si este valor de x corresponde a un máximo o a un mínimo:

Para $x < 0$ (y en la proximidad de 0), $y' < 0$ luego y decrece.

Para $x > 0$ (y en la proximidad de 0), $y' > 0$ luego y crece.

Así, y decrece primero, creciendo a continuación; luego se tendrá un mínimo de y.

3.° Sea

$$y = \frac{1}{3x^2 + 1}.$$

Pondremos $y = \frac{1}{u}$ con $\begin{cases} u = 3x^2 + 1 \\ u' = 6x \end{cases}$

luego la derivada tendrá por valor:

$$y' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$$

$$= -\frac{1}{(3x^2 + 1)^2} \cdot 6x = \frac{-6x}{(3x^2 + 1)^2} = 0$$

de donde

$$-6x = 0 \quad \text{luego} \quad x = 0.$$

Para $x < 0$, $-6x$ es > 0, y' es > 0 luego $y \nearrow$

Para $x > 0$, $-6x$ es < 0, y' es < 0 luego $y \searrow$.

Es decir que y crece primeramente, decreciendo a continuación; se tedrá, pues, un máximo de y.

4.° Sea

$$y = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Pondremos

$$y = \frac{u}{v} \quad \text{luego} \quad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$y' = \frac{(1 + x^2) \cdot 2 - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = 0$$

de donde

$$2 - 2x^2 = 0 \quad x^2 = 1 \quad x = \pm 1.$$

Hay, pues, dos valores, correspondientes probablemente a un máximo y un mínimo.

La derivada tiene el signo del numerador $-2x^2+2$; luego es un trinomio que tiene un a negativo; este trinomio pasa, pues, por un máximo, y, como se anula para -1 y $+1$, está representado por la figura 27. Es, pues, positivo entre las raíces y negativo fuera de ellas.

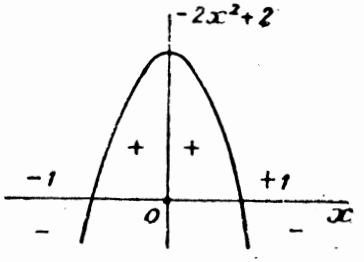

FIG. 27

Tomemos primero el valor -1:

para $x<-1$, $y'<0$ luego $y\searrow$

para $x>-1$, $y'>0$ luego $y\nearrow$

Así, y decrece primero, creciendo seguidamente: se tiene, pues, un mínimo de y para $x=-1$.

Tomemos ahora el valor $+1$:

para $x<+1$ $y'>0$ luego $y\nearrow$

para $x>+1$ $y'<0$ luego $y\searrow$.

Así, y crece primero y decrece inmediatamente: se tiene, por tanto, un máximo de y para $x=+1$.

5.° Sea

$$y=\frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Pondremos

$$y=\frac{1}{u} \quad \text{y derivando} \quad y'=-\frac{1}{u^2}\cdot u'$$

$$=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\cdot\cos x=\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}=0$$

de donde

$$\cos x=0 \quad \text{luego} \quad x=\frac{\pi}{2} \quad \text{y también} \quad 3\frac{\pi}{2}$$

Habrá un máximo y un mínimo:

para $x<\frac{\pi}{2}$, $\cos x$ es >0, luego $y'<0$ e y decrece,

para $x>\frac{\pi}{2}$, $\cos x$ es <0, luego $y'>0$ e y crece.

Se tiene, pues, un mínimo de y para $x=\frac{\pi}{2}$.

— Para $x < 3\frac{\pi}{2}$, $\cos x$ es < 0, luego $y' > 0$, e y crece,

para $x > 3\frac{\pi}{2}$, $\cos x$ es > 0, luego $y' < 0$, e y decrece.

Se tiene, pues, un máximo de y para $x = \frac{3\pi}{2}$.

6.° *Estudiar cómo varía el producto de dos números variables y positivos cuya suma es constante e igual a* $+ S$.

Llamemos x y z a estos dos números:

$$x + z = S.$$

Su producto, que es variable, es una función. Llamémosla y:

$$y = x \cdot z = x(S - x)$$
$$= -x^2 + Sx = f(x).$$

Anulemos la derivada:

$$y' = -2x + S = 0.$$

Se deduce

$$S = 2x \quad \text{y despejando} \quad x = \frac{S}{2}$$

luego

$$z = S - x = S - \frac{S}{2} = \frac{S}{2}.$$

los dos números son iguales.

¿Tenemos un máximo o un mínimo?

Para $x < \frac{S}{2}$, por ejemplo 0, $y' > 0$ luego $y \nearrow$

para $x > \frac{S}{2}$, $y' < 0$ luego $y \searrow$.

Tenemos, pues, un *máximo* del producto.

NOTA. — Más tarde estudiaremos, en el trazado de las curvas, otros ejemplos de búsqueda de máximos y de mínimos.

47. Segunda regla. — A veces es más cómoda de aplicar la regla siguiente, en lugar de estudiar el signo de la primera derivada.

TEOREMA. — *Si, cuando la derivada primera se anula, la derivada segunda es positiva, la función y pasa por un mínimo, y, si la derivada segunda es negativa, la función y pasa por un máximo.*

— Para tener el signo de y'', es preciso evidentemente reemplazar x por el valor que anula a y'.

— La verificación geométrica es evidente, como vamos a ver sobre una figura; pero en el Tomo II, § 10, cuando hayamos estudiado la fórmula de TAYLOR, daremos una demostración rigurosa, puramente analítica *y sin ninguna figura.*

— Consideremos, por ejemplo, en la figura 28, el caso de un mínimo. *Antes* de este mínimo, la tangente a la curva en un punto cualquiera forma un ángulo obtuso con el eje de las x, siendo cada vez más obtuso conforme nos acercamos al mínimo, donde llega al valor π.

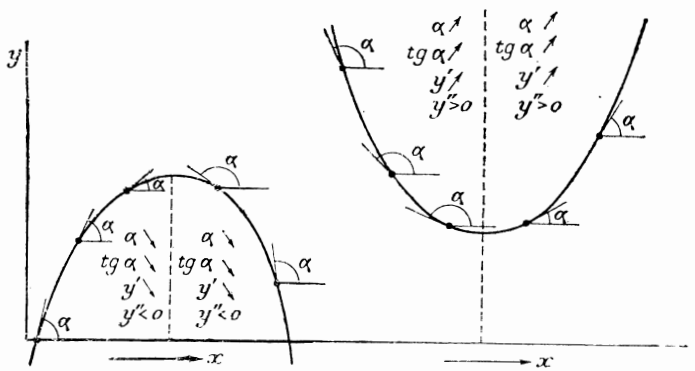

FIG. 28

La tangente trigonométrica de este ángulo α es, pues, cada vez menos negativa, luego crece; y si $\operatorname{tg}\alpha = y'$ crece, la derivada de esta función variable, *es decir* y'', será positiva. Esto resulta más comprensible observando lo que ocurre *después* del mínimo, donde el ángulo α, que es agudo, aumenta cada vez más; lo mismo le ocurre a $\operatorname{tg}\alpha = y'$. Por tanto, la derivada de esta función creciente, *es decir* y'', será positiva. En resumen

si $y'' > 0$, y pasa por un mínimo

— En el caso de un máximo, situémonos antes de este máximo, donde el ángulo α decrece, luego también lo hará $\operatorname{tg}\alpha$. Pero como $\operatorname{tg}\alpha = y$, al decrecer y' la derivada de esta función decreciente, *o sea* y'', es negativa. Después del máximo, el ángulo α es cada vez menos obtuso, luego *tg* α *es cada vez más negativa,* o sea que decrece, siendo su derivada, *es decir* y'', negativa. En resumen

si $y'' < 0$, y pasa por un máximo

NOTA. — Naturalmente que esta regla se aplicará sólo si el cálculo de y'' es fácil y rápido, es decir, si y' se presenta bajo una forma sencilla.

Veremos en el próximo número lo que ocurre cuando $y'' = 0$.

Ejemplos:

1.° Sea $y = x^2 - 5x + 6.$

Derivando

$$y' = 2x - 5$$
$$y'' = +2$$

que es siempre > 0, luego y pasa por un mínimo.

2.° Sea $y = \operatorname{sen} x$

$$y' = \cos x = 0 \quad \text{para} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = 3\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$
$$y'' = -\operatorname{sen} x.$$

Para

$$x = \frac{\pi}{2}, \qquad y'' = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -1,$$

y pasa por un máximo.

Para $$x = \frac{3\pi}{2}, \qquad y'' = -\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = +1$$

entonces y pasa por un mínimo.

3.° *Sean dos números variables y positivos* x *y* z *cuyo producto* $+ \mathrm{P}$ *es constante. Estudiar si su suma pasa por un máximo o por un mínimo.*

Tenemos

$$x \cdot z = \mathrm{P} = \text{constante.}$$

Su suma, que es variable, será por tanto una función, que llamaremos y:

$$y = x + z = x + \frac{P}{x}.$$

Derivando e igualando a 0:

$$y' = 1 - \frac{P}{x^2} = 0$$

de donde

$$1 = \frac{P}{x^2} \quad \text{luego} \quad x = \pm \sqrt{P},$$

pudiendo también escribirse

$$x = \frac{P}{x} = z$$

los dos números son, pues, iguales.

¿Se trata de un máximo o de un mínimo? Calculemos y'':

$$y'' = 0 - P(-2x^{-3}) = +\frac{2P}{x^3},$$

y como P es positivo, lo mismo que x, y'' es siempre positiva: consecuentemente tendremos un *mínimo* de la suma de estos dos números.

Un estudio similar se encuentra en radio cuando se calcula la ganancia de amplificación de un transformador de frecuencia media, cuyo secundario está sintonizado. Igualmente, este problema interviene en el estudio de la propagación de corriente de alta frecuencia a lo largo de las líneas que tienen una inductancia y capacidad repartidas.

4.° *Calcular la derivada de la siguiente función:*

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

¿Tiene un máximo o un mínimo?

La variable x debe ser evidentemente positiva. Anulemos y':

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x^{-3/2}\right) = \frac{1}{4x}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$$

de donde

$$\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{luego} \quad x = +1.$$

Calculemos y''. Tenemos primeramente

$$y' = \frac{1}{4}(x^{-1/2} - x^{-3/2})$$

de donde

$$y'' = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2} + \frac{3}{2}x^{-5/2}\right)$$

$$= \frac{1}{8x^{3/2}}\left(\frac{3}{x} - 1\right)$$

y, para $x = 1$, queda:

$$y'' = +\frac{2}{8} = +\frac{1}{4},$$

luego, siendo la derivada segunda positiva, se tendrá un mínimo de y.

Podría generalizarse, viéndose entonces que la función

$$y = \frac{a}{x^n} + bx^n$$

donde n tiene cualquier valor, positivo o negativo, pasa por un mínimo cuando

$$\frac{a}{x^n} = bx^n$$

5.° Sea la función

$$y = x(x-1)(x-2)$$
$$= x(x^2 - 2x - x + 2) = x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x$$
$$= x^3 - 3x^2 + 2x$$

Derivando, tenemos

$$y' = 3x^2 - 6x + 2 = 0 \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} x \approx +1{,}6 \\ x \approx +0{,}4 \end{cases}$$

$$y'' = 6x - 6 = 6(x-1).$$

Para $x = 1{,}6$ $y'' > 0$ luego y es mínimo,
para $x = 0{,}4$ $y'' < 0$ luego y es máximo.

6.° Sea la función

$$y = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Anteriormente se calculó la derivada:

$$y' = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = 0 \quad \text{de donde} \quad x = +1 \quad \text{y} \quad -1.$$

Calculemos y'':

$$y'' = \frac{(1 + x^2)^2(-4x) - (2 - 2x^2)2(1 + x^2)\cdot 2x}{(1 + x^2)^4},$$

dividiendo arriba y abajo por $(1 + x^2)$:

$$y'' = \frac{(1 + x^2)(-4x) - 4x(2 - 2x^2)}{(1 + x^2)^3} = \frac{-4x(-x^2 + 3)}{(1 + x^2)^3}$$

Para $x = +1$ $y'' < 0$ y pasa por un máximo,
para $x = -1$ $y'' > 0$ y pasa por un mínimo.

NOTA. — Es preciso poner cuidado en todos los cálculos de esta clase, pues se está expuesto a cualquier error de signo.

— En las próximas páginas tendremos ocasión de aplicar la regla precedente a un gran número de otros ejemplos y aplicaciones prácticas.

48. Puntos de inflexión. — Un punto de inflexión es un punto donde la concavidad de la curva *cambia de sentido,* o sea, en el cual *la tangente geométrica a la curva atraviesa dicha curva.*

La figura 29 muestra seis formas de puntos de inflexión: las dos de la izquierda tienen una tangente inclinada, las dos del centro la tienen horizontal, y las dos de la derecha tienen una tangente vertical.

Es la derivada la que, en todos los casos, dará la pendiente de la tangente a la curva.

Pero el teorema siguiente nos indicará en qué casos tenemos un punto de inflexión

TEOREMA. — *Cuando la derivada segunda es nula, y, además, para este valor de x, y' no cambia de signo, tenemos un punto de inflexión, e inversamente.*

La verificación geométrica es fácil y evidente, pero una vez más, hemos de decir que, en el Tomo II, § 10, tras el estudio de la serie de TAYLOR, daremos una demostración rigurosa, puramente algebraica,

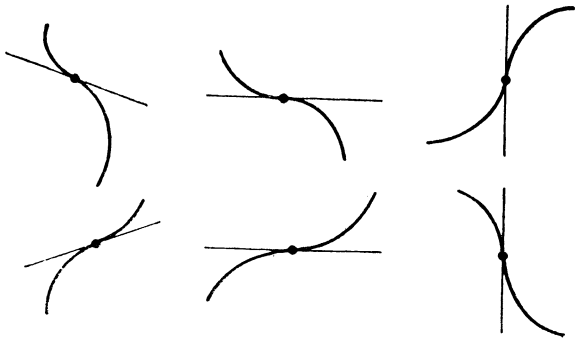

FIG. 29

sin ninguna figura. Esta demostración analítica no se puede hacer actualmente por faltarnos todavía ciertos elementos.

— La figura 30 *a* muestra una curva que tiene un punto de inflexión en C. Tracemos la tangente a la curva en diferentes puntos A, B, C, D, E; desde A hasta C se ve que la pendiente de la tangente disminuye, mientras que desde C hasta E la pendiente crece de nuevo.

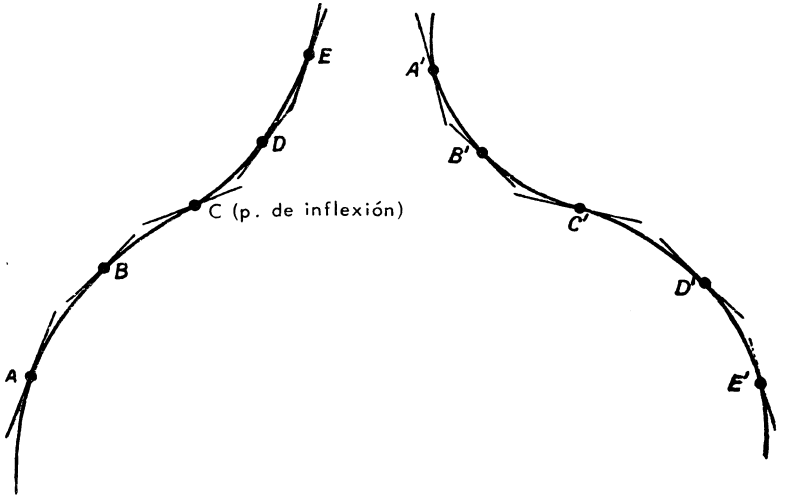

FIG. 30

Dicha pndiente pasa, pues, por un *mínimo en C*. Pero, como la pendiente es igual a la derivada y', *entonces su derivada* y'' *debe ser nula en* C.

— Análogamente, en la figura 30 *b*, donde C′ es un punto de inflexión, se ve que, yendo de A′ a C′, la inclinación de la tangente a la curva *crece* (en efecto, el ángulo de esta tangente es obtuso, y la pendiente es *cada vez menos negativa,* luego crece), mientras que, yendo de C′ a E′, la inclinación a la tangente a la curva *decrece* (en efecto, el ángulo de esta tangente es obtuso, y la pendiente es *cada vez más negativa,* luego decrece). La pendiente pasa, pues, por un *máximo en* C′, luego la derivada de la pendiente, o sea y'', será nula en C′.

— *En resumen,* $y'' = 0$ *en un punto de inflexión, a condición de que* y' *no cambie de signo.*

— *Si, además,* $y' = 0$, *la tangente es horizontal*; *y si* $y' = \infty$, *la tangente es vertical.*

— Anulando y'' se deduce el valor de x, abscisa del punto de inflexión.

Ejemplos:

1.° Sea $y = \operatorname{sen} x$

Tendremos

$$y' = \cos x$$

$$y'' = -\operatorname{sen} x = 0, \qquad \text{de donde} \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi, \end{cases} \quad \text{y} \quad 2\pi \quad \text{etc.}$$

lo que se confirma por la conocida curva del seno, dada por la figura 31. Se observa que, para estos tres valores, 0, π y 2π la derivada y' no cambia de signo: se tiene, pues, un punto de inflexión. La inclinación de la tangente en A, B, C, estará dada llevando los tres valores precedentes a y'.

$$y_A' = \cos 0 = 1 = \operatorname{tg} \alpha \qquad \alpha = 45°$$
$$y_B' = \cos \pi = -1 = \operatorname{tg} \alpha \qquad \alpha = 135°$$
$$y_C' = \cos 2\pi = 1 = \operatorname{tg} \alpha \qquad \alpha = 45°.$$

2.° Sea $y = x^3$. Tendremos $y' = 3x^2$ e $y'' = 6x$. Luego y'' se anula para $x = 0$, y como y' es siempre positiva, tendremos un punto de inflexión para $x = 0$

3.° Sea $y = x^4$. Tendremos $y' = 4x^3$ e $y'' = 12x^2$. Luego y'' se anula para $x = 0$. Parece ser que hay un punto de inflexión, pero ello no es cierto, porque

$$\text{si} \quad x < 0, \quad y' < 0$$
$$\text{si} \quad x > 0, \quad y' > 0$$

y' cambia así de signo para $x = 0$, y, como y' se anula para dicho valor de $x = 0$, lo que hay es simplemente un mínimo de y.

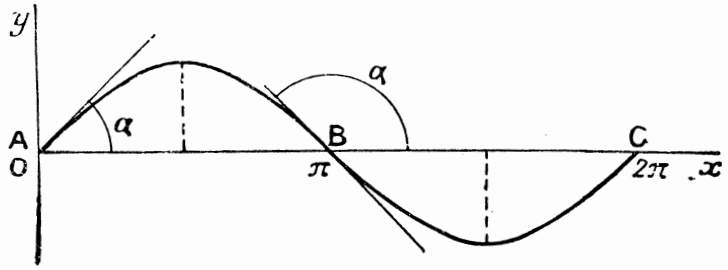

FIG. 31

NOTA. — No haremos ya aquí más ejemplos de búsqueda de puntos de inflexión. Encontraremos algunos al final de este tomo así como en el tomo VI, en Geometría analítica.

CAPITULO VIII

BUSQUEDA DE LOS MAXIMOS Y DE LOS MINIMOS PARA APLICACIONES PRACTICAS

49. Problema de la caja.— *Para fabricar una caja cuadrada y sin tapa se toma una hoja cuadrada de cartón o de metal cuyo lado vale* a (fig. 32). *Después, en cada uno de los cuatro ángulos, se corta un cuadrado de lado x, a determinar, y se doblan perpendicularmente las cuatro bandas que quedan. Calcular el valor de x para que el volumen de la caja sea mínimo.*

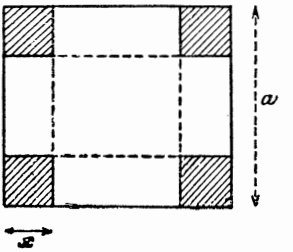

FIG. 32

—La superficie del fondo de la caja es:

$$S = (a - 2x)^2$$

y el volumen de la caja será $V = S \cdot x$

$$V = x(a - 2x)^2 = x(a^2 + 4x^2 - 4ax)$$
$$= 4x^3 - 4ax^2 + a^2x.$$

Como se pide un máximo del volumen, anulemos su derivada:

$$V' = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0,$$

ecuación cuyas raíces son:

$$x = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24} = \frac{8a \pm 4a}{24}$$

es decir

$$x' = \frac{a}{2} \quad \text{y} \quad x'' = \frac{a}{6}.$$

Habrá, por tanto, un máximo y un mínimo.

Calculemos la derivada segunda de V:

$$V'' = 24x - 8a$$

Para $x = \frac{a}{2}$ $V'' = 12a - 8a = +4a$, luego V es mínimo,

para $x = \frac{a}{6}$ $V'' = 4a - 8a = -4a$, luego V es máximo.

Se observa, por otra parte, que, para $x = \frac{a}{2}$, no existe la caja, luego evidentemente se trata de un mínimo.

50. Problema de la cacerola.— *Se quiere fabricar una cacerola de aluminio embutido mediante una hoja de metal de superficie dada S. Calcular la relación que debe existir entre la altura H y el radio R para que el volumen sea máximo. Se supone que no hay desperdicio alguno de metal, que su espesor permanece constante y que no hay tapa (fig. 33).*

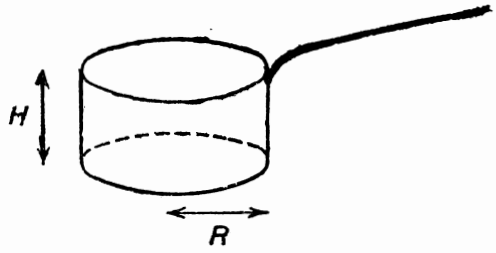

FIG. 33

— Habrá que anular la derivada del volumen, el cual vale:

$$V = \pi R^2 H,$$

pero, como R y H son dos variables, hay que expresar dicho volumen en función de una sola variable. Ahora bien, la superficie *total* vale

$$S = \pi R^2 + 2\pi RH$$

de donde

$$H = \frac{S - \pi R^2}{2\pi R}.$$

Llevando este valor a V:

$$V = \pi R^2 \left(\frac{S - \pi R^2}{2\pi R}\right) = \frac{R}{2}(S - \pi R^2)$$

$$V = \frac{RS}{2} - \frac{\pi R^3}{2} = f(R)$$

de donde, derivando

$$V' = \frac{S}{2} - \frac{3\pi R^2}{2} = 0.$$

Deduciéndose que:

$$S = 3\pi R^2 \qquad \text{luego} \qquad R = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}.$$

Pero siempre se verificará que:

$$S = \pi R^2 + 2\pi RH.$$

Igualemos estos dos valores de S:

$$\pi R^2 + 2\pi RH = 3\pi R^2$$

es decir que

$$2\pi R^2 = 2\pi RH$$

luego

$$\boxed{R = H}$$

Veamos si es un máximo. Calculemos la derivada segunda:

$$V'' = -\frac{6\pi R}{2} = -3\pi R.$$

Luego, efectivamente, se trata de un *máximo* de volumen al ser esta derivada negativa.

Variante:

Problema de la lata de conserva que tenga el mínimo de metal.

Se quiere fabricar una lata de conserva cilíndrica, con tapa, que, para un volumen V dado, emplee el mínimo de metal. Encontrar la relación entre el radio y la altura. De esta forma se tendrá la lata de fabricación más económica.

— Se trata ni más ni menos que del problema de la cacerola, pero con tapa y con un volumen dado. Calculemos, pues, la superficie total del metal, cuya derivada anularemos. El volumen es

$$V = \pi R^2 H \qquad (1)$$

y la superficie total vale

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi RH.$$

De V se saca:

$$H = \frac{V}{\pi R^2}$$

y llevando este valor a S:

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R} = f(R).$$

Derivando:

$$S' = 4\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0$$

de donde

$$4\pi R = \frac{2V}{R^2} \qquad \text{luego} \qquad R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Igualando el valor de V obtenido de esta ecuación con el de la ecuación (1) se halla $H = 2R = D$.

Veamos si lo que tenemos es realmente un mínimo de S. Calculemos S'':

$$S'' = 4\pi - 2V(-2R^{-3}) = 4\pi + \frac{4V}{R^3}$$

que es siempre positiva, luego tendremos en efecto un *mínimo* de superficie.

51. Problema de la potencia eléctrica máxima. — Es un problema de gran importancia en electricidad, encontrándose también en radio en el estudio de la recepción y de la emisión.

Sea un generador de fuerza electromotriz E y de resistencia interna r en serie con una resistencia exterior R variable. Encontrar el valor de R para que la potencia disipada en R sea máxima (fig 34).

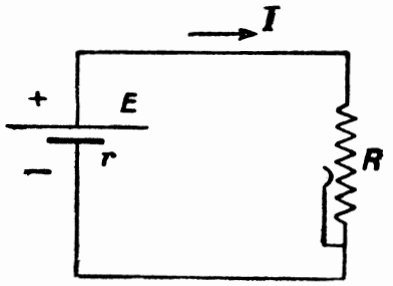

FIG. 34

La potencia está dada por la ley de JOULE:

$$P = RI^2; \qquad \text{pero} \qquad I = \frac{E}{R + r};$$

luego

$$P = R\left(\frac{E}{R + r}\right)^2 = \frac{RE^2}{(R + r)^2} = f(R).$$

Anulemos, pues, la derivada respecto de R:

$$P' = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{(R + r)^2 \cdot E^2 - RE^2 \cdot 2(R + r)}{(R + r)^4}$$

$$= \frac{(R + r)E^2 - 2RE^2}{(R + r)^3} = 0$$

de donde

$$(R + r)E^2 = 2RE^2$$

$$R + r = 2R$$

luego, finalmente, se obtiene

$$\boxed{R = r}$$

la resistencia externa debe ser igual a la resistencia interna.

— Ahora bien, ¿es un máximo de P o bien un mínimo?

— Estudiemos el signo de P′: la derivada tiene el signo del numerador, el cual se reduce a $E^2 \cdot (r - R)$.

Si $R < r$, P′ es positiva, luego P crece,
y si $R > r$, P′ es negativa, y P decrece.

Se ve, pues, que tenemos un *máximo* de potencia.

Aquí el cálculo de P″ no sería de interés, ya que P′ es un cociente.

52. Problema de la reflexión de la luz (DESCARTES). — *Sea un espejo plano, una fuente luminosa S y un ojo O que mira hacia el espejo. Encontrar la posición del punto M donde un rayo salido de S chocará contra el espejo para, a continuación, dirigirse hacia el ojo, sabiendo que la luz sigue el camino más corto.* Esta última hipótesis ya se conocía en el siglo XVII, hace 300 años, y posteriormente se demostró que era exacta.

Desde esta época se ha podido, gracias a las derivadas, enunciar la ley de la reflexión de la luz.

— Se da *a*, *b* y *l* (fig. 35) y se determinará la posición del punto M por la distancia *x* Inmediatamente buscaremos una relación trigonométrica entre los ángulos situados alrededor del punto M.

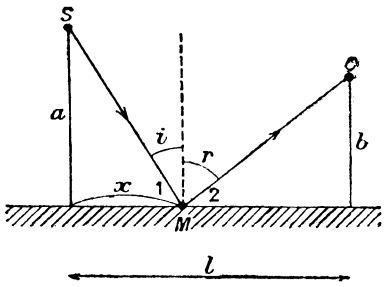

FIG. 35

— Tenemos
distancia total

$$D = SMO = SM + MO$$

$$D = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (l - x)^2} = f(x)$$

$$D' = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot 2x + \frac{1}{2\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} \cdot 2(l - x) \cdot (-1) = 0$$

$$= \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{l - x}{\sqrt{b^2 + l - x)^2}} = 0$$

de donde

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{l - x}{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}} \qquad (1)$$

Queremos sacar x, para lo cual elevaremos al cuadrado:

$$\frac{x^2}{a^2 + x^2} = \frac{(l - x)^2}{b^2 + (l - x)^2}$$

restemos los numeradores de los denominadores:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{(l - x)^2}{b^2}$$

que equivale a

$$\frac{x}{l - x} = \frac{a}{b},$$

sumando los numeradores a los denominadores:

$$\frac{x}{l} = \frac{a}{a + b}$$

sacamos

$$x = \frac{al}{a + b}.$$

Pero la ecuación (1) tiene un sentido trigonométrico: en efecto, $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ es el coseno del ángulo $\hat{1}$, mientras que $\frac{l - x}{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}}$ es el coseno del ángulo $\hat{2}$, luego:

$$\cos \hat{1} = \cos \hat{2},$$

siendo, pues, iguales los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{2}$, sus complementos también lo serán.

$$\boxed{i = r}$$

El ángulo de incidencia es igual al de reflexión. *Esta es la ley de la reflexión de la luz,* encontrada por DESCARTES.

— Evidentemente se tiene un recorrido mínimo, porque si, en la derivada, se reemplaza x por un valor *inferior* a $\frac{al}{a+b}$, por ejemplo por 0, se constata que esta derivada es negativa, luego D decrece; se tendrá, pues, un mínimo de la distancia D.

53. Problema de la refracción de la luz (DESCARTES).—*Sea una cubeta llena de agua (fig. 36), una fuente luminosa S a la distancia* a, *a un ojo O situado a la profundidad* b, *recibiendo un rayo luminoso que viene de S. Encontrar la posición del punto M donde el rayo llega a la superficie del agua, sabiendo que la luz emplea el tiempo mínimo para ir desde S hasta O; siendo la velocidad de la luz V en el aire y V′ en el agua (V > V′). Deducir la ley de la refracción de la luz.*

Esta última hipótesis (V>V′) era conocida en el siglo XVII, en el tiempo de DESCARTES.

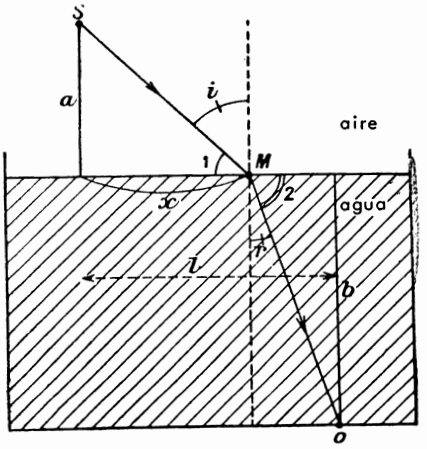

FIG. 36

— La experiencia muestra que la luz, para ir de S a O, sigue una línea quebrada SMO. La posición del punto M estará determinada por la distancia x. En seguida deduciremos una relación trigonométrica que liga los ángulos de vértice en M (fig. 36).

— Calculemos la duración total t del recorrido, anulando después la derivada t'.

El tiempo para ir de S a M es $\frac{SM}{V}$, y de M a O es $\frac{MO}{V'}$.

El tiempo total es, pues:

$$t = \frac{SM}{V} + \frac{MO}{V'}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{V} = \frac{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}{V'},$$

y derivando

$$t' = \frac{1}{V} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot 2x + \frac{1}{V'} \cdot \frac{1}{2\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} 2(l-x)(-1) = 0.$$

Que queda

$$\frac{x}{V\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{l-x}{V'\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} \qquad (1)$$

elevando al cuadrado

$$\frac{x^2}{V^2(a^2 + x^2)} = \frac{(l-x)^2}{V'^2[b^2 + (l-x)^2]},$$

pero, haciendo los productos en cruz y desarrollando se ve que se obtiene una ecuación completa de cuarto grado, la cual no se puede resolver.

Pero no tiene aquí ninguna importancia, ya que el valor de x apenas si nos interesa.

—Pero la ecuación (1) se puede escribir:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{V}{V'} \cdot \frac{(l-x)}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}$$

pero

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{SM} \text{ es el coseno del ángulo } \hat{1},$$

y

$$\frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = \frac{l-x}{MO} \text{ es el coseno del ángulo } \hat{2},$$

$$\cos \hat{1} = \frac{V}{V'} \cdot \cos \hat{2}$$

y, sustituyendo los cosenos por los senos de los complementos:

$$\operatorname{sen} i = \frac{V}{V'} \cdot \operatorname{sen} r$$

$\frac{V}{V'}$, ha sido denominado índice de refracción del agua con relación al aire, designándose por n, de donde la ley de la refracción de la luz, encontrada por DESCARTES en el siglo XVII, queda:

$$\boxed{\operatorname{sen} i = n \cdot \operatorname{sen} r}$$

y, como $V > V'$, será $n > 1$, luego $\operatorname{sen} i > \operatorname{sen} r$, e $i > r$.

¡El camino más corto no es, por tanto, la línea recta!

— Puede verse que se trata, por supuesto, de un mínimo de recorrido, porque, si se hace $x = 0$ en la derivada t', se ve que ésta es negativa, luego t decrece, debiendo pasar por un mínimo.

54. Problema del navío. — *Sea un navío que debe recorrer una distancia D (en kilómetros). Entre todos los gastos, están los del combustible y el personal. El gasto horario de combustible es proporcional al cuadrado de la velocidad: es de la forma Kv^2; y la paga horaria del personal es, evidentemente, independiente de la velocidad; llamémosla K'. Calcular la velocidad v del navío en km/h para que el gasto total sea mínimo.*

— Habrá, en efecto, un mínimo de gasto para una velocidad bien determinada: si el navío va muy rápido gastará mucho combustible, pero, como permanece menos tiempo en el mar, la paga del personal será baja. Por el contrario, si el navío va lentamente, gasta menos combustible por hora pero, como permanece más tiempo en el mar, la paga del personal será más grande.

Sea v la velocidad en kilómetros por hora y N el número de días de travesía. La distancia total es, pues, en km.:

$$D = N \cdot 24v$$

el gasto en una hora es $Kv^2 + K'$, en un día será 24 veces mayor y el gasto total será N veces mayor que este último. Llamémosle y, puesto que es una función cuyo mínimo se busca

$$y = N \cdot 24(Kv^2 + K')$$

$$= \frac{D}{24v} \cdot 24(Kv^2 + K')$$

$$= DKv + D\frac{K'}{v} = f(v).$$

Escribamos que la derivada es nula:

$$y' = DK - \frac{DK'}{v^2} = 0,$$

se deduce:

$$K = \frac{K'}{v^2} \qquad \text{luego} \qquad v = \sqrt{\frac{K'}{K}},$$

o también

$$Kv^2 = K';$$

el gasto horario de combustible debe ser igual a la paga horaria del personal.

Veamos si se trata de un mínimo de gasto. Tomemos la derivada segunda

$$y'' = 0 - DK'(-2v^{-3}) = +\frac{2DK'}{v^3},$$

la cual, siendo siempre positiva, indica que, en efecto, se trata de un *mínimo* de gasto.

Este problema, así como su resultado, son ya bien conocidos por las compañías de navegación marítima y aérea, y de transporte en general.

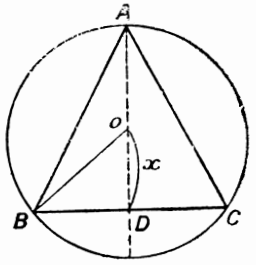

FIG. 37

55. Problema del círculo.—*Se da un círculo de metal, de radio R, en el cual se quiere cortar un triángulo isósceles (fig. 37), cuya superficie sea máxima.*

La distancia x, a calcular, será la que se tome como variable.

—Tracemos OB; el triángulo OBD nos da

$$BD = \sqrt{R^2 - x^2}$$

y la superficie del triángulo es

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}\,(R + x)$$

$$S = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2} = uv.$$

Escribamos que la derivada es nula:

$$S' = \sqrt{R^2 - x^2} + (R + x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}}(-2x)$$

$$= \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x(R + x)}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0.$$

eliminemos el denominador:

$$(R^2 - x^2) - x(R + x) = 0$$
$$R^2 - x^2 - xR - x^2 = 0$$
$$2x^2 + Rx - R^2 = 0,$$

ecuación cuyas raíces son:

$$x = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 8R^2}}{4}$$

es decir

$$x' = \frac{-R + 3R}{4} = \frac{R}{2} \quad \text{y} \quad x'' = \frac{-R - 3R}{4} = -R.$$

— El segundo valor, $x = -R$, significa que el punto D está en A, luego no hay triángulo, siendo la superficie, por supuesto, mínima. El valor $\frac{R}{2}$ debe, pues, corresponder a un máximo:

para $x < \frac{R}{2}$, por ejemplo 0, S' es positiva, luego S ↗, y, como S' se anula a continuación, se tendrá, efectivamente, un máximo de S.

56. Problema de la estatua. — *Sea un pedestal de altura h sobre el cual está colocada una estatua de altura* a. *Averiguar a qué distancia del pie del pedestal hay que colocarse para ver la estatua bajo el ángulo máximo (fig. 38).*

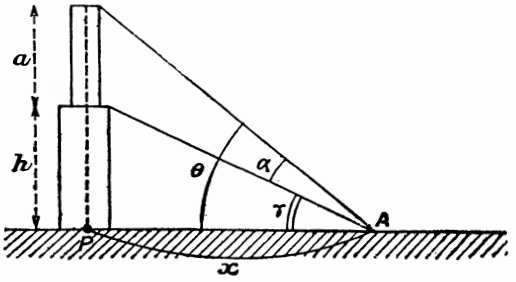

FIG. 38

— Se ve que, si se está muy lejos, el ángulo α es muy pequeño, mientras que, si se está demasiado cerca del pie, también dicho ángulo α será muy pequeño. Hay, pues, una distancia AP = x para la que el ángulo α será máximo. Y $tg\,\alpha$ será también máxima.

— Calculemos $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\theta - \gamma) = \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}\gamma}.$$

Ahora bien

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a+h}{x} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{h}{x}$$

por tanto

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{a+h}{x} - \dfrac{h}{x}}{1 + \dfrac{a+h}{x} \cdot \dfrac{h}{x}} = \frac{x(a+h) - xh}{x^2 + ah + h^2}.$$

Llamemos y a esta función, de la cual buscaremos el máximo:

$$y = \frac{ax}{x^2 + ah + h^2}.$$

Anulemos la derivada de este cociente:

$$y' = \frac{(x^2 + ah + h^2)a - ax \cdot 2x}{v^2} = 0$$

o, dividiendo por a:

$$x^2 + ah + h^2 - 2x^2 = 0,$$

$$ah + h^2 = x^2 \qquad \text{y} \qquad x = \sqrt{h(a+h)};$$

x es, pues, media geométrica entre la altura del pedestal y la altura total.

— Veamos si lo que tenemos para este valor es un máximo. Estudiemos para ello el signo de la derivada a una y otra parte del valor crítico:

Para $x < \sqrt{h(a+h)}$, por ejemplo $x = 0$, y' es positiva, luego $y \nearrow$. Siendo y' positiva antes de anularse, y crece, teniéndose entonces un *máximo* de $\operatorname{tg}\alpha$, y por tanto del ángulo α.

57. Problema del autobús (fig. 39). — *Un peatón que está en B quiere ir a A, tomando un autobús sobre la marcha al pasar por la carretera. Buscar la posición del punto C donde este peatón debe tomar el autobús para llegar a A en el mínimo tiempo. La velocidad del autobús es V y la del peatón V', siendo por supuesto* $V' < V$.

— Es evidente que, si $V' > V$, el peatón no obtiene ningún ahorro de tiempo yendo a tomar el autobús; su camino debería ser simplemente ir a pie de B a A.

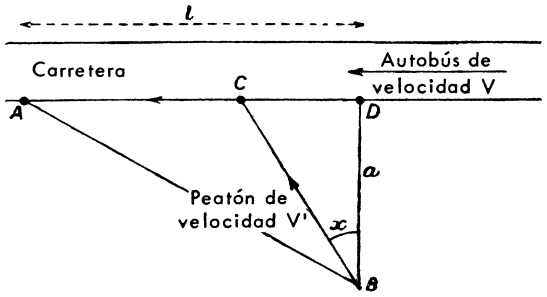

FIG. 39

— Se da, naturalmente, las distancias a y l.

— Tomemos el ángulo x como variable.

Tenemos

$$a = BC \cdot \cos x \qquad \text{de donde} \qquad BC = \frac{a}{\cos x}$$

y además

$$CA = DA - DC = l - a \operatorname{tg} x.$$

El tiempo total t del recorrido será:

$$t = \frac{BC}{V'} + \frac{CA}{V} = \frac{a}{V' \cos x} + \frac{(l - a \operatorname{tg} x)}{V}$$

$$= \frac{a}{V' \cos x} + \frac{l}{V} - \frac{a \operatorname{tg} x}{V} = f(x).$$

Anulemos la derivada de t:

$$t' = -\frac{a}{V' \cos^2 x}(-\operatorname{sen} x) - \frac{a}{V} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 0$$

que, reducida, queda

$$\frac{\operatorname{sen} x}{V'} - \frac{1}{V} = 0$$

luego

$$\operatorname{sen} x = \frac{V'}{V} (< 1).$$

Se ve que el problema sólo es posible si $V' < V$, lo que es evidente.

Veamos si es un mínimo. Estudiemos el signo de t' dando a sen x un valor *inferior* al crítico, por ejemplo sen $x = 0$, lo que da (haciendo $\cos x = 1$) $t' < 0$, luego t decrece; y, como t' se anula enseguida, será, pues, un *mínimo* de t lo que tendremos.

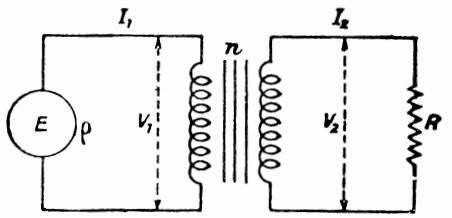

FIG. 40

58. Problema del transformador eléctrico (fig. 40). — *Tenemos un generador alterno, de fuerza electromotriz E y de resistencia interna ρ conectado a una resistencia fija R mediante un transformador que se supone perfecto, es decir, cuyo rendimiento es del 100 % (sin pérdidas y sin fugas). Calcular la relación de transformación n para que la corriente en R sea máxima.*

— Se observará que, si la corriente es máxima, lo mismo ocurrirá con la diferencia de potencial V_2 en las bornas de R, así como con la potencia eléctrica disipada en R, cuyo valor es RI^2.

Se sabe que la relación de transformación es

$$n = \frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{I_2}.$$

Calculemos, pues, V_2 en función de n. Pero tenemos que:

$$V_1 = E - \rho I_1 \qquad \text{de donde} \qquad I_1 = \frac{E - V_1}{\rho}.$$

Por otra parte

$$V_2 = R \cdot I_2 = R\frac{I_1}{n} = \frac{R}{n} \cdot \left(\frac{E - V_1}{\rho}\right)$$

$$= \frac{RE}{n\rho} - \frac{RV_1}{n\rho} = \frac{RE}{n\rho} - \frac{R}{n\rho}\left(\frac{V_2}{n}\right)$$

operando

$$V_2 + \frac{RV_2}{n^2\rho} = \frac{RE}{n\rho}$$

$$V_2\left(1+\frac{R}{n^2\rho}\right)=\frac{RE}{n\rho}$$

$$V_2\left(\frac{n^2\rho+R}{n^2\rho}\right)=\frac{RE}{n\rho}$$

$$V_2=\frac{n^2\rho}{n^2\rho+R}\cdot\frac{RE}{n\rho}=\frac{nRE}{n^2\rho+R}=f(n),$$

siendo n la única variable, anulemos la derivada de este cociente respecto de n:

$$V_2'=\frac{(n^2\rho+R)RE-nRE\cdot 2n\rho}{(n^2\rho+R)^2}=0$$

es decir

$$(n^2\rho+R)-2n^2\rho=0$$
$$R-n^2\rho=0$$
$$R=n^2\rho$$

de donde

$$\boxed{n=\sqrt{\frac{R}{\rho}}}$$

Si $R=\rho$, $n=1$ y el transformador es inútil,
si $R<\rho$, $n<1$ y el transformador es reductor de tensión,
si $R>\rho$, $n>1$ y el transformador es elevador de tensión.

— Pero, ¿se trata de un máximo de V_2? — Estudiemos el signo de la derivada un poco *antes* del valor crítico de n:

para $n<\sqrt{\frac{R}{\rho}}$, por ejemplo $n=0$, $V_2'>0$, luego V_2 crece.

Como la derivada se anula inmediatamente, en efecto, se tendrá un máximo de V_2, así como de la corriente I en R, lo mismo que de la potencia disipada en R.

Si, por casualidad, $R=\rho$, $n=1$ y no hay ninguna mejora utilizando un transformador, donde siempre hay pérdidas de energía.

Sin embargo, incluso si $n=1$, un transformador es, a menudo, útil, por aislar el primero del secundario en el caso en que, accidentalmente, se tuviera alta tensión en el primario.

59. Problema del proyectil. — *Se lanza oblicuamente, bajo un ángulo* α, *un proyectil con una velocidad inicial V. Encontrar el valor del ángulo* α *para que el alcance del tiro sea máximo, y encontrar la altura máxima de la trayectoria. Se desprecia la resistencia del aire* (fig. 41).

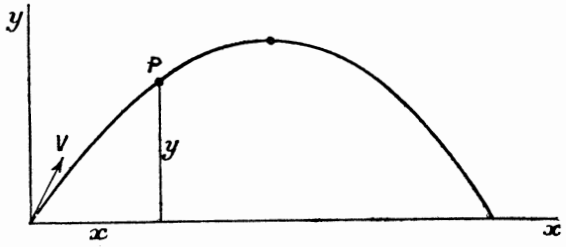

FIG. 41

— Se demuestra, en mecánica, que la abscisa x y la ordenada y del proyectil están ligadas por la ecuación

$$y = \frac{-g}{2V^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

se trata de un trinomio de segundo grado, representado por una parábola de eje vertical (a es negativa), y pasando por un máximo.

El alcance, es decir, el valor máximo de x, se obtiene haciendo $y = 0$, de donde:

$$x \operatorname{tg} \alpha = \frac{gx^2}{2V^2 \cos^2 \alpha}$$

y despejando x:

$$x = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{2V^2 \cos^2 \alpha}{g} = \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{2V^2 \cos \alpha}{g}$$

$$= \operatorname{sen} 2\alpha \cdot \frac{V^2}{g} = f(\alpha).$$

Si α varía, el alcance máximo se obtendrá anulando la derivada de x respecto de α:

$$x' = \frac{V^2}{g} \cdot 2 \cos 2\alpha = 0 \qquad \text{y} \qquad \cos 2\alpha = 0$$

de donde

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad \alpha = \frac{\pi}{4} = 45°.$$

¿Es un máximo? — Calculemos x'':

$$x'' = -\frac{4V^2}{g} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$$

para $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$ y x'' es negativa, luego tenemos ciertamente un *máximo* si el ángulo de tiro es de 45°.

En cuanto al máximo de altura alcanzada por el proyectil, anulemos y', lo que nos dará el valor de x:

$$y' = \frac{-2gx}{2V^2 \cos^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha = 0$$

de donde se deduce

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{gx}{V^2 \cos^2 \alpha}$$

luego

$$x = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot V^2 \cos^2 \alpha}{g}$$

$$= \frac{V^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{1}{2} \frac{V^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}.$$

Se observa que es la mitad del alcance máximo. Fácilmente se deducirá el correspondiente valor de y. Para conocer la altura alcanzada por este proyectil, tenemos:

$$y = \frac{-g}{2V^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{V^4 \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{g^2} + \operatorname{tg} \cdot \frac{V^2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}{g}$$

$$= \frac{-V^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g} + \frac{V^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{g},$$

que, para $\alpha = \frac{\pi}{4}$, queda:

$$y = \frac{V^2}{4g}.$$

Se vería así que, si V = 1.000 m/s, la altura máxima es de 25 km, siendo la abscisa x en ese momento de 100 km (despreciando, naturalmente la resistencia del aire).

60. Problema de la resonancia eléctrica. — *Pongamos en serie un condensador de capacidad C y una bobina de resistencia R cuya inductancia sea L. Derivemos el conjunto sobre una d.d.p. alterna V. Se sabe que la corriente I vale:*

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Suponiendo la capacidad C variable, búsquese bajo qué condiciones la corriente I puede llegar a ser máxima.

Dicha corriente I se puede escribir:

$$I = V \cdot \left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right]^{-1/2} = f(C).$$

Anulemos la derivada con relación a C:

$$I' = V\left(-\frac{1}{2}\right)\left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right]^{-3/2} \cdot 2\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\left(\frac{\omega}{C^2\omega^2}\right)$$

$$= -\frac{V\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{C^2\omega\left[\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}\right]^3} = 0$$

de donde

$$L\omega = -\frac{1}{C\omega} = 0$$

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \qquad \text{luego} \qquad \boxed{LC\omega^2 = 1}$$

También se deduce $C = \frac{1}{L\omega^2}$ y $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Pero $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ es la pulsación propia Ω del circuito oscilante LC (si allí se produjera una descarga oscilante). Luego será:

$$\omega = \Omega$$

y si f es la frecuencia de la fuente de alimentación (y de la corriente) y F la frecuencia propia del circuito oscilante, será:

$$2\pi f = 2\pi F$$

es decir $\boxed{f = F}$

la frecuencia f del generador y la F del circuito oscilante son iguales: se dice entonces que hay resonancia.

— ¿Es un máximo de I?

— Hagamos $C < \frac{1}{L\omega^2}$, por ejemplo; el denominador de I′ es positivo, el paréntesis del numerador es negativo, luego I′ es positivo y la corriente I crece; pero, como la derivada se anula en seguida, se tendrá un *máximo* de corriente. Se ve así que, dando a C un valor conveniente, la corriente I es máxima. Entonces resulta que la diferencia de potencial en bornas de C es también máxima (hay sobretensión). Esta propiedad se utiliza en todos los montajes de radio.

61. Problema de la inducción magnética. — *Sea una espira metálica de radio R recorrida por una corriente de intensidad I; la inducción B del campo magnético producido en un punto P a la distancia* a *del centro de la espira, y sobre el eje de ella, está dada por la fórmula:*

$$B = \frac{2\pi IR^2 \times 10^{-7}}{(R^2 + a^2)^{3/2}} = f(R).$$

Si R es variable, buscar su valor para que la inducción B sea máxima.

En efecto, si R es pequeño, todos los puntos de la circunferencia están a corta distancia del punto P; pero, si R es grande, la circunferencia estará mucho más lejos del punto P, y, como la longitud del hilo es mayor, el campo creado en P tiene tendencia a ser mayor. Se concibe, pues, que haya un valor crítico de R para el cual la inducción magnética en P será máxima.

— Anulemos, pues, la derivada de B respecto de R (B es un cociente $\frac{u}{v}$):

$$B' = \frac{(R^2 + a^2)^{3/2} \cdot 4\pi IR10^{-7} - 2\pi IR^2 \cdot \frac{3}{2}(R^2 + a^2)^{1/2} \cdot 2R \cdot 10^{-7}}{(R^2 + a^2)^3} = 0$$

de donde, dividiendo por $4\pi RI10^{-7}$:

$$(R^2 + a^2)^{3/2} - \frac{3}{2} R^2 (R^2 + a^2)^{1/2} = 0$$

simplificando

$$(R^2 + a^2) - \frac{3}{2}R^2 = 0$$

$$a^2 - \frac{R^2}{2} = 0$$

$$R^2 = 2a^2 \quad \text{y} \quad R = a\sqrt{2}.$$

Veamos si es un máximo. Estudiemos el signo de B′.

— Si $R < a\sqrt{2}$, por ejemplo $R = a$, se ve fácilmente que el numerador de B′ es positivo, luego B′ es positiva y el campo crece.

Si $R > a\sqrt{2}$, por ejemplo $R = 2a$, fácilmente se ve que B′ es negativa, luego la inducción B decrece.

— La inducción magnética B pasa pues por un máximo para $R = a\sqrt{2}$.

62. Problema del jardinero. — *Un jardinero debe construir un parterre de flores que tenga la forma de un sector circular. Dispone de 100 metros de hilo de hierro para marcar dicho sector. ¿Qué radio debe dar al círculo para que la superficie de su parterre sea la mayor posible?*

— Se sabe que la superficie de un sector (fig. 42) es:

$$S = \frac{1}{2}R^2\alpha,$$

donde el ángulo α está expresado en radianes.

Por otra parte, la longitud total del hilo de hierro es:

$$l = 2R + R\alpha = 100 \text{ m}$$

de donde:

$$\alpha = \frac{100 - 2R}{R} = \frac{100}{R} - 2.$$

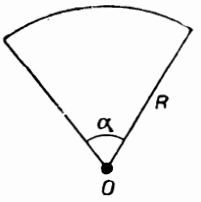

FIG. 42

Llevemos este valor a S:

$$S = \frac{1}{2}R^2\left(\frac{100}{R} - 2\right) = 50R - R^2$$

y anulemos la derivada:

$$S' = 50 - 2R = 0$$

de donde:

$$R = 25 \text{ m}.$$

Llevando a este valor a l:

$$100 = 2 \cdot 25 + 25\alpha$$

de donde:

$$\alpha = 2 \text{ radianes} \approx 114°.$$

— *¿Tenemos un máximo de S?* — Calculemos S″:

$$S'' = -2.$$

siendo este valor negativo, se tendrá un máximo para la superficie.

63. Problema del corredor. — *Sea un corredor que debe ir de un punto A a otro B en el tiempo máximo, a condición de tocar un punto cualquiera C de la circunferencia construida sobre AB como diámetro. Se supone constante la velocidad del corredor (fig. 43). Se pide calcular el ángulo α bajo el cual debe partir.*

— Se trata, por tanto, de calcular el ángulo α para que la distancia total AC + CB sea máxima, siendo siempre recto el ángulo en C por pertenecer este punto a la circunferencia.

Llamemos y a esta distancia total y R al radio del círculo.

El triángulo ABC nos da:

$$AC = 2R \cos \alpha$$
$$BC = 2R \operatorname{sen} \alpha$$

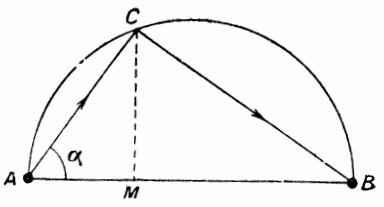

FIG. 43

de donde:

$$y = AC + BC = 2R (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)$$
$$= f(\alpha)$$

Derivemos con respecto a α, y anulemos después:

$$y' = 2R (-\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha) = 0$$

de donde:

$$-\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha = 0$$
$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha$$

luego

$$\operatorname{tg} \alpha = 1$$

y

$$\alpha = 45° \qquad (\alpha < 90°).$$

Resulta, pues, que M será el punto medio de AB y C el punto medio de la semicircunferencia.

— *¿Tendremos un máximo o un mínimo?* — Calculemos y'':

$$y'' = 2R (-\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha),$$

y, para $\alpha = 45°$, esta cantidad es evidentemente negativa: luego se tendrá un máximo.

64. Problema del mejor modo de agrupar un conjunto de generadores eléctricos. — Se posee n generadores eléctricos de f.e.m. E y de resistencia interna r cada uno, los cuales se deben derivar de una resistencia exterior R dada. ¿Cómo hay que agruparlos, en serie, en paralelo o en serie-paralelo, para que la potencia útil en R sea máxima?

— Llamemos m al número de elementos en serie en cada rama, y p al número de ramas en paralelo (fig. 44).

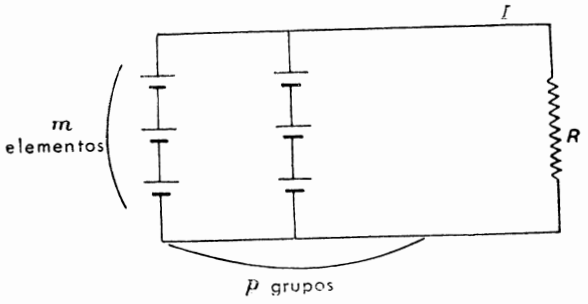

FIG. 44

La f.e.m. del conjunto es, evidentemente, la de una sola rama, es decir mE. Siendo mr la resistencia de una rama, la resistencia interna total será, pues, p veces menor, al haber p ramas en paralelo.

Para que la potencia en R sea máxima es preciso que la corriente I sea máxima, puesto que $P = R \cdot I^2$.

La ley de KIRCHHOFF nos da:

$$I = \frac{mE}{\frac{mr}{p} + R} = \frac{pmE}{mr + Rp},$$

pero $pm = n$, luego:

$$I = \frac{nE}{mr + Rp} = \frac{nE}{mr + R\frac{n}{m}} = f(m),$$

donde la única incógnita es m, variable.

La corriente I será máxima si el denominador es mínimo. Anulemos, pues, la derivada de este último, al que llamaremos y:

$$y = mr + \frac{Rn}{m} = f(m)$$

$$y'_m = r - \frac{Rn}{m^2} = 0$$

de donde:

$$r = \frac{Rn}{m^2}$$

luego

$$m = \sqrt{\frac{Rn}{r}}.$$

Luego p valdrá

$$p = \frac{n}{m} = n\sqrt{\frac{r}{Rn}} = \sqrt{\frac{rn}{R}}.$$

Y tendremos un mínimo al ser la derivada segunda positiva:

$$y''_m = 0 - Rn(-2m^{-3}) = \frac{+2Rn}{m^3}$$

Es preciso, evidentemente, que m y p sean números enteros; pero, como esto será poco probable, se tomará los números enteros *más próximos* a los valores calculados, con la salvedad de que debe ser $mp \leqslant n$.

Se observa que la resistencia total de la batería, que es $\frac{mr}{p}$, se puede escribir también

$$\frac{mr}{p} = \frac{\sqrt{\frac{Rn}{r}} \cdot r}{\sqrt{\frac{rn}{R}}} = \sqrt{R} \cdot \sqrt{R} = R,$$

será igual, por tanto, a la resistencia exterior R.

Hallamos así la condición de la potencia máxima que ya habíamos visto en un problema precedente (51).

Por otra parte, esta conclusión es *muy general,* aplicándose en continua, en alterna, en baja y en alta frecuencia. Por ejemplo, en un amplificador de radio o de electrónica, la lámpara de salida que alimenta el altavoz es un generador de potencia BF y se encontrará las mismas conclusiones, como así queda demostrado en el Tomo II de nuestra obra *Théorie et pratique des circuits de l'Electronique et des amplificateurs.*

Es esta una ley general de la electricidad.

65. Problema del puente de Wheatstone. — Todo lector de este libro conoce el puente de Wheatstone, utilizado en electricidad para la medida precisa de resistencias (fig. 45).

Se sabe que, cuando el puente está equilibrado, es decir, cuando el galvanómetro marca cero, se obtiene la siguiente fórmula, deducida de inmediato según la configuración del esquema y fácil de retener en la memoria:

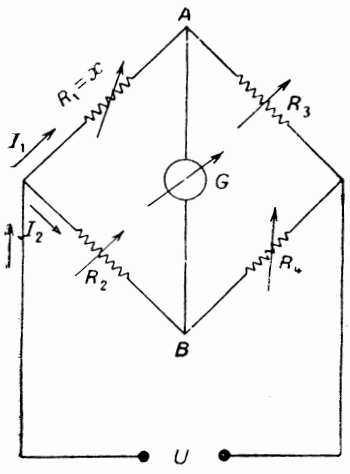

FIG. 45

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \qquad (1)$$

El problema que se propone es: *¿cuál es la condición que debe cumplirse para que la sensibilidad sea máxima?*

— Primeramente hemos de definir qué es lo que se entiende por *sensibilidad* del puente.

Supongamos que R_1 sea la resistencia a medir, a la que llamaremos x.

Si se modifica x en una pequeña cantidad αx (donde α es, por ejemplo, igual a 1/100 ó 1/1.000) la nueva corriente en R_1 será:

$$I_1 = \frac{U}{x + \alpha x + R_3}$$

y en R_2:

$$I_2 = \frac{U}{R_2 + R_4},$$

y, *no estando derivado el galvanómetro,* la d.d.p. entre los puntos A y B será, según la ley de Ohm:

$$U_A - U_B = I_1(x + \alpha x) - I_2 R_2.$$

Efectuemos el cociente $\frac{U_A - U_B}{U}$:

$$\frac{U_A - U_B}{U} = \frac{x + \alpha x}{x + \alpha x + R_3} - \frac{R_2}{R_2 + R_4}$$

$$\frac{U_G}{U} = \frac{(x + \alpha x)(R_2 + R_4) - R_2(x + \alpha x + R_3)}{(x + \alpha x + R_3)(R_2 + R_4)}.$$

Pero, según la ecuación (1), se tiene $xR_4 = R_2R_3$, luego el numerador se simplifica y queda:

$$\frac{U_A - U_B}{U} = \frac{U_G}{U} = \frac{\alpha x \cdot R_4}{(x + \alpha x + R_3)(R_2 + R_4)}$$

pero, como αx es muy pequeño comparado con x y R_3, el primer paréntesis del denominador puede simplificarse y reemplazarse por $(x + R_3)$, lo que da:

$$\frac{U_G}{U} = \frac{\alpha x \cdot R_4}{(x + R_3)(R_2 + R_4)}.$$

Volvamos a tomar la ecuación (1) en la forma:

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} = a, \tag{2}$$

de donde se deduce:

$$\frac{R_2 + R_4}{R_4} = a + 1 \qquad \text{y también} \qquad \frac{R_1 + R_3}{R_1} = 1 + \frac{1}{a}.$$

La sensibilidad del puente es justamente el cociente de la d.d.p. U_G que aparece en las bornas del galvanómetro por la d.d.p. U en las bornas del puente, y esto bajo la acción de una variación αx de x.

Pero U_G se puede escribir de la forma siguiente:

$$U_G = U \cdot \frac{\alpha x}{x + R_3} \cdot \frac{R_4}{R_2 + R_4} = \frac{U \cdot \alpha x}{x + R_3} \cdot \frac{1}{1 + a}$$

$$= \frac{U \cdot \alpha x}{x\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \cdot \frac{1}{1 + a} = \frac{aU \cdot \alpha x}{x(1 + a)^2}. \tag{3}$$

Ahora bien, según la ecuación (2) se puede escribir (puesto que R_3 es una constante):

$$\frac{\alpha x}{x} = \frac{\alpha R_1}{R_1} = \frac{\alpha a}{a},$$

y la ecuación (3) se transforma en:

$$U_G = \frac{U}{(1 + a)^2} \cdot a \cdot \frac{\alpha x}{x} = \frac{U}{(1 + a)^2} \cdot a \cdot \frac{\alpha a}{a}$$

y finalmente:

$$U_G = \frac{U \cdot \alpha a}{(1 + a)^2} = f(a)$$

donde a es la única variable. Se puede entonces buscar el máximo de U_G anulando la derivada con relación a a de la expresión siguiente (donde α es una constante numérica):

$$y = \frac{U\alpha a}{(1 + a)^2}.$$

Derivando respecto de a:

$$y_a' = \frac{(1+a)^2 U\alpha - U\alpha a \cdot 2(1+a)}{(1+a)^4} = 0$$

$$= U\alpha \frac{(1+a-2a)}{(1+a)^3} = 0,$$

queda

$$1 - a = 0$$

luego

$$a = 1,$$

es decir que debe cumplirse:

$$\boxed{R_1 = R_3 \quad \text{y} \quad R_2 = R_4}$$

— Ahora bien, *¿se trata de un máximo?*

El signo de y' depende del valor que toma la cantidad $1 - a$, luego:

si $a < 1$, $y' > 0$ e y crece,
si $a > 1$, $y' < 0$ e y decrece,

luego sí se trata de un máximo de sensibilidad.

66. Problema sobre el rendimiento de un transformador eléctrico. *¿En qué condiciones el rendimiento de un transformador eléctrico puede ser máximo?*

— Consideremos un transformador eléctrico que entrega a la salida del bobinado secundario una cierta potencia útil:

$$P_u = U_2 I_2 \cos \varphi_2$$

tomando los valores eficaces de la tensión y de la corriente (fig. 46).

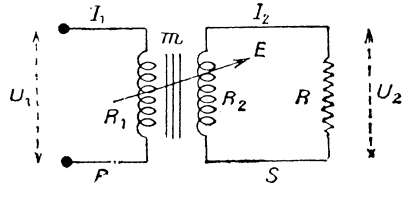

FIG. 46

Ahora bien, en dicho transformador hay pérdidas de energía:

1.° Las pérdidas por efecto Joule en el primario y en el secundario, en vatios:

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2,$$

2.° Las pérdidas en el hierro, que comprenden las debidas a corrientes de Foucault y las de histéresis, las cuales calientan el hierro; se expresan también en vatios.

Se observa, en efecto, que cuanto mayor histéresis tiene un núcleo de hierro más se calienta. Se demuestra, incluso matemáticamente, en electricidad, que las pérdidas en vatios debidas a la histéresis son proporcionales a la superficie interna de la curva de histéresis, durante un período.

El rendimiento de dicho transformador, que es el cociente de la potencia útil RI_2^2 recogida en el exterior por la potencia total suministrada por la fuente $U_1 I_1 \cos \varphi_1$ (tomando valores eficaces), se puede, pues, escribir:

$$\eta = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{total}}} = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{útil}+\text{pérdidas}}}$$

$$= \frac{P_u}{P_{u+\text{pérdidas cobre}+\text{pérdidas hierro}}}.$$

Como, por otra parte, I_1 es proporcional a I_2, se puede decir que el conjunto de las pérdidas en el cobre es proporcional a I_2^2, por tanto a P_u^2, y se puede escribir η bajo la forma siguiente, dividiendo arriba y abajo por P_u (siendo K un coeficiente de proporcionalidad):

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + KP_u^2 + P_{\text{hierro}}} = \frac{1}{1 + KP_u + \dfrac{P_{\text{hierro}}}{P_u}}$$

Se puede entonces hacer que este rendimiento sea máximo.

Hay que hacer mínimo el denominador, por tanto la expresión:

$$y = K \cdot P_u + \frac{P_{\text{hierro}}}{P_u} = f(P_u),$$

siendo constantes las pérdidas en el hierro, puesto que no dependen más que de la inducción B en el hierro, la cual depende de la tensión primaria U_1, que es constante.

— Anulemos, pues, la derivada respecto de P_u:

$$y' = K - \frac{P_{\text{hierro}}}{P_u^2} = 0 \qquad (1)$$

de donde:

$$K = \frac{P_{\text{hierro}}}{P_u^2}$$

y

$$KP_u^2 = P_{\text{hierro}}.$$

Pero KP_u^2 representa justamente las pérdidas en el cobre, de donde se deduce este simple resultado, bien conocido por todos los técnicos e ingenieros en electricidad:

$$\boxed{\text{Pérdidas en el cobre} = \text{Pérdidas en el hierro}}$$

— *Ahora bien, ¿es un máximo lo que tenemos?*

Calculemos y'' a partir de la ecuación (1):

$$y'' = 0 - P_{\text{hierro}}(-2P_u^{-3})$$

$$= + \frac{2P_{\text{hierro}}}{P_u^3}$$

siendo esta cantidad siempre positiva, se tendrá en efecto un mínimo de y, *luego un máximo de rendimiento.*

— A partir de la condición hallada anteriormente se calcula los grandes transformadores industriales, en los que el valor del rendimiento es primordial: en efetco, si en un gran transformador de 30.000 kW de una línea de transporte de energía se mejora el rendimiento en un 1 %, se gana así una potencia de 300 kW, lo cual, al final del año (que cuenta más de 8.000 horas) supondrá una ganancia de energía de varios cientos de miles de kilovatios/hora..., lo que supone un importante beneficio.

67. Problema del condensador shuntado por una resistencia. — En electricidad industrial, en radio y en electrónica se utiliza constantemente un circuito formado por un condensador de capacidad C shuntado por una resistencia R, *el cual tiene innumerables aplicaciones* (fig. 47).

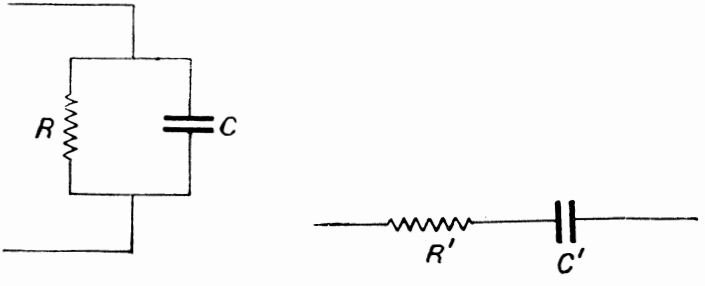

FIG. 47

Puede también representar una capacidad C que tuviera fugas internas en el aislante (o bien cuyas dos bornas estuvieran mal aisladas), representando R la resistencia interna de fuga del aislante o bien la resistencia de aislamiento de las dos bornas.

Por ciertas razones, imposibles de exponer aquí, se puede transformar este circuito poniéndole bajo la forma de una resistencia R′ *en serie* con una capacidad C′, a condición de que la impedancia total sea la misma; y esta transformación es, a menudo, muy útil.

El cálculo de R′ no podemos darlo aquí, sólo damos el resultado, pero se encontrará el cálculo detallado en el tomo primero de nuestra obra *Théorie et pratique des circuits de l'Electronique et des amplificateurs*. Se halla:

$$R' = \frac{R}{R^2C^2\omega^2 + 1}, \qquad (\omega = 2\pi f)$$

y es bastante curioso comprobar que esta resistencia depende de la frecuencia y de la capacidad.

—El problema que se plantea es éste:

Siendo R variable de cero a infinito, sucede que R′ pasa por un máximo o por un mínimo, lo cual es interesante de conocer, puesto que las pérdidas de energía en el circuito, que son $R'I^2$, serían máximas o mínimas.

Anulemos, pues, la derivada de R′ respecto de R, derivada de un cociente puesto bajo la forma:

$$y = \frac{x}{x^2C^2\omega^2 + 1}.$$

Se tendrá:

$$y' = \frac{(x^2C^2\omega^2 + 1) \cdot 1 - x \cdot 2xC^2\omega^2}{v^2} = 0$$

de donde:

$$x^2C^2\omega^2 + 1 - 2x^2C^2\omega^2 = 0$$
$$1 - x^2C^2\omega^2 = 0$$
$$x^2C^2\omega^2 = 1$$

luego

$$R = x = \frac{1}{C\omega},$$

pero $\frac{1}{C\omega}$ es la impedancia del condensador solo.

— *Pero, ¿se tiene un máximo o un mínimo?*

Estudiemos el signo del numerador de y':

$$y' = \frac{1 - x^2C^2\omega^2}{v^2}.$$

Se ve en seguida que, si x es muy pequeño, cercano a cero, por ejemplo $\left(x < \frac{1}{C\omega}\right)$, y' es positiva; pero, si x es muy grande, $\left(x > \frac{1}{C\omega}\right)$, y' es negativa; luego y crece primero y en seguida decrece: *se tiene, pues, un máximo de R'.*

Así, las pérdidas de energía en R serán máximas si $R = \frac{1}{C\omega}$; entonces:

$$R' = \frac{R}{R^2 \cdot \frac{1}{R^2} + 1} = \frac{R}{2}.$$

68. Problema de la línea telefónica. — En una línea telefónica (a dos hilos) muy larga hay una capacidad repartida a todo lo largo de la línea, y que es debida a la proximidad de los dos hilos. Hay también una inductancia uniformemente repartida. Pero la línea posee una resistencia óhmica y no está perfectamente aislada, habiendo fugas en los aisladores y entre los dos hilos (si se tocan aun estando aislados).

La corriente, a lo largo de la línea, por tanto, se debilita; esta es la razón por la cual, sin precauciones especiales y sin amplificadores, no es posible telefonear a largas distancias.

Consideremos una línea de 1 km de longitud, y designemos:

R la resistencia óhmica,

C la capacidad entre los dos hilos,

L la inductancia,

G la conductancia (inversa de la resistencia de fuga debida al mal aislamiento).

El estudio matemático detallado que hemos dado en el Tomo I, *Electronique*, de las *Techniques de l'Ingénieur*, muestra que el debi-

litamiento de la corriente, o amortiguamiento, está dado por la cantidad siguiente, que se llama «coeficiente de amortiguamiento»:

$$\alpha = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

—*Si se toma L como única variable, puede intentarse hacer* α *mínimo* anulando la derivada de α respecto de L.

Tomemos, pues, la derivada de la función:

$$y = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{x}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{x}{C}}.$$

Derivando, se tiene

$$y' = \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{C}{x}}}\left(-\frac{C}{x^2}\right) + \frac{G}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{C}}} \cdot \frac{1}{C}.$$

Simplifiquemos y anulémosla:

$$-\frac{RC}{4}\sqrt{\frac{x}{C}} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{G}{4}\sqrt{\frac{C}{x}} \cdot \frac{1}{C} = 0$$

o bien:

$$G\sqrt{\frac{C}{x}} \cdot \frac{1}{C} = RC\sqrt{\frac{x}{C}} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$GC^{-1/2} = RC^{1/2}x^{-3/2} \cdot x^{1/2}$$

luego:

$$Gx = RC$$

es decir que:

$$\boxed{GL = RC}$$

Esta es la condición encontrada por el sabio inglés HEAVISIDE, conocida como *condición de Heaviside.*

Se podría ver que lo que se tiene es un mínimo.

Se observa que α es independiente de la frecuencia; *ésta es la condición de no distorsión, y todas las frecuencias se propagan igualmente bien.*

Se tendrá así el mínimo de debilitamiento.

— La condición LG = RC permite fabricar una línea telefónica para grandes distancias; y esto, combinado con otros progresos, como por ejemplo la *pupinización*, inventada por el gran ingeniero americano PUPIN (*el cual, al mismo tiempo, era un gran matemático*), ha permitido telefonear, antes de 1914, de París a Berlín, e incluso de París a Roma, *sin ningún amplificador*. A ello contribuyó también un potente micrófono de carbón que había sido construido por la Sociedad francesa de teléfonos.

69. Problema del transformador de alta frecuencia de Radio. — En radio se tiene, tanto a la emisión como a la recepción, que resolver el siguiente problema fundamental: *dado un transformador cuyo primario está en serie en el circuito de placa de una lámpara amplificadora y cuyo secundario está puesto en resonancia por un condensador* (fig. 48), *se trata de encontrar el valor de la inductancia mutua m para que la d.d.p. en las bornas del condensador sea máxima.*

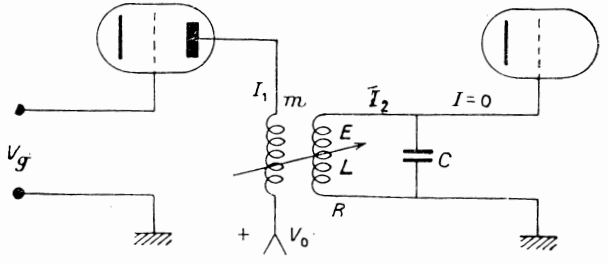

FIG. 48

De aquí es donde se deriva el espacio rejilla-cátodo de una válvula amplificadora.

Se supone que la resistencia interna rejilla-cátodo es infinita (estando la lámpara convenientemente polarizada) para que el condensador no proporcione ninguna corriente; es simplemente un generador de tensión.

— Es preciso primeramente calcular la f.e.m. inducida por el primario en el secundario. Sabemos, como para todo transformador, que es igual a:

$$E = m\omega I_1 \qquad \begin{pmatrix} I_1 \text{ en amperios} \\ m \text{ en henrios} \\ E \text{ en voltios} \end{pmatrix}$$

desde I_1 es la corriente en el primario.

Llamemos L a la inductancia del secundario,
R a la resistencia (en HF) del secundario,
C a la capacidad de sintonización.

Apliquemos a la rejilla una d.d.p. sinusoidal:

$$v_g = V_g \cdot \operatorname{sen} \omega t, \qquad (\omega = 2\pi f)$$

resultando en el circuito de placa una corriente cuya amplitud máxima llamaremos I_1, la cual hemos de calcular.

Para ello es preciso reemplazar *todo* el trnasformador por su impedancia equivalente: se demuestra que ésta, en la resonancia, es una resistencia pura igual a $\frac{m^2\omega^2}{R}$ (fig. 49). La demostración completa la damos en el Tomo I de nuestra obra *Théorie et pratique des circuits de l'Electronique et des amplificateurs.*

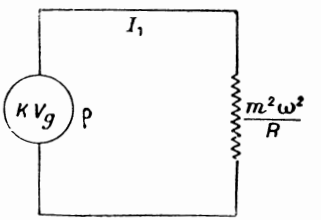

FIG. 49

Por otra parte, si se llama K al coeficiente de amplificación de la lámpara y y ρ a su resistencia interna, se sabe que el circuito de placa de esta válvula es equivalente a un generador de f.e.m. KV_g y de resistencia interna ρ. Se tendrá aquí el esquema equivalente de la figura 49.

Se puede entonces aplicar la ley de KIRCHHOFF:

$$I_1 = \frac{KV_g}{\rho + \frac{m^2\omega^2}{R}}.$$

La corriente I_2 en el circuito LC será, pues, en la resonancia:

$$I_2 = \frac{E}{R} = \frac{m\omega I_1}{R}$$

$$= \frac{m\omega}{R} \cdot \frac{KV_g}{\rho + \frac{m^2\omega^2}{R}}$$

y la d.d.p. en las bornas de C será:

$$U_C = \frac{I_2}{C\omega},$$

pero en la resonancia se tiene $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, de donde:

$$U_C = L\omega I_2 = L\omega \cdot \frac{m\omega}{R} \cdot \frac{KV_g}{\rho + \frac{m^2\omega^2}{R}}$$

$$= \frac{KLm\omega^2 V_g}{R + m^2\omega^2} = f(m),$$

expresión que es preciso hacer máxima.

Los valores K, L, ω, V_g, ρ y R vienen dados, luego m es la única variable; tendremos, pues, que tomar la derivada de la función:

$$y = \frac{KL\omega^2 V_g x}{\rho R + x^2\omega^2}$$

que es un cociente. Se tendrá:

$$y' = \frac{(\rho R + x^2\omega^2)KL\omega^2 V_g - KL\omega^2 V_g x \cdot 2x\omega^2}{v^2} = 0.$$

Simplificando el numerador, queda:

$$\rho R + x^2\omega^2 - 2x^2\omega^2 = 0$$
$$\rho R - x^2\omega^2 = 0$$

luego

$$x^2\omega^2 = \rho R$$

de donde:

$$x = \frac{1}{\omega}\sqrt{\rho R} = m.$$

— *Pero, ¿tendremos un máximo o un mínimo?*

Aquí el cálculo de y'' sería largo y complicado.

Estudiemos el signo de y'. Su numerador se reduce a:

$$N = KL\omega^2 V_g(\rho R - x^2\omega^2),$$

luego todo depende del signo de este paréntesis:

si $x^2 < \frac{\rho R}{\omega^2}$, N es positivo, luego y crece,

si $x^2 > \frac{\rho R}{\omega^2}$, N es negativo, luego y decrece.

Por consiguiente, y primero crece y después decrece; luego se tiene un *máximo*.

Calculemos U_C en este caso, puesto que $m^2 \cdot \omega^2 = \rho \cdot R$:

$$U_C = \frac{KLm\omega^2 V_g}{m^2\omega^2 + m^2\omega^2} = \frac{KLm\omega^2 V_g}{2m^2\omega^2}$$

$$= \frac{KLV_g}{2m} = \frac{KLV_g\omega}{2\sqrt{\rho R}}$$

o bien:

$$U_C = V_g \cdot \frac{K}{2\sqrt{\rho}} \cdot \frac{L\omega}{\sqrt{R}}$$

Esta expresión es de fácil discusión: es preciso elegir una válvula para la que $\frac{K}{\sqrt{\rho}}$ sea lo mayor posible, y, para una frecuencia dada, construir un arrollamiento para que $\frac{L}{\sqrt{R}}$ sea también lo mayor posible. Ahí es donde se muestra el mérito del constructor.

Se ve también, *cosa notable*, que, para tener U_C máximo, m no es máximo, es decir que *no se tiene el acoplamiento máximo*.

Finalmente se observará que el valor crítico:

$$m = \frac{1}{\omega}\sqrt{\rho R} \qquad \begin{pmatrix} \rho \text{ y R en ohmios} \\ m \text{ en henrios} \end{pmatrix}$$

es *muy pequeño*, pues ω es muy grande y R es muy pequeña (algunos ohmios).

—*Se ve así la utilidad del estudio de las matemáticas* para fabricar un buen transformador de alta frecuencia, de emisión o de recepción, contrariamente a lo que los espíritus simplistas poiensan...

70. **Problema de la selectividad de un circuito de sintonía de Radio.** — Consideremos un circuito de sintonía de radio formado por una bobina cuya inductancia es L (henrios) en paralelo con un condensador de capacidad C (faradios), colocado el conjunto en serie en el circuito de placa de una lámpara triodo amplificadora, según el

montaje bien conocido (fig. 50 *a*). Naturalmente, se ha regulado C para estar en la resonancia.

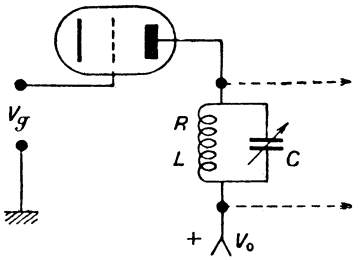

FIG. 50 *a*

Sabemos que tal circuito en la resonancia tiene una impedancia considerable, pudiendo alcanzar varias centenas de millares de ohmios en alta frecuencia. La d.d.p. en las bornas de este circuito se recoge para enviarla a la rejilla de la válvula siguiente.

Toda persona que haya manejado un puesto de radio tiene la noción de la selectividad: se dice que un puesto es selectivo si, después de ser puesto en sintonía para una emisión, ésta desaparece en cuanto se gira ligeramente, en un sentido u otro, el botón de reglaje. Esto quiere decir que la impedancia de nuestro circuito LC debe disminuir muy rápidamente a una y otra parte de la resonancia. Dicho de otra manera, la curva de resonancia que da las variaciones de *la impedanzia Z del circuito en función de la frecuencia debe ser tan aguda como sea posible* (fig. 50 b).

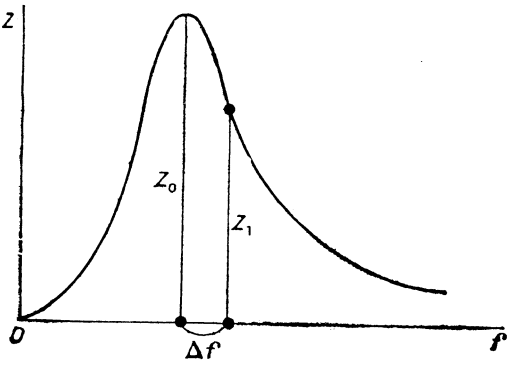

FIG. 50 *b*

Esta selectividad no es una cosa inmaterial y nebulosa: se puede calcular. Basta con hacer el cociente de la impedancia Z_0 en la resonancia por la impedancia Z_1 cuando se está desintonizando una cantidad Δf; *este cociente deberá ser lo mayor posible.*

Naturalmente, no podemos hacer aquí el cálculo detallado, solamente daremos la respuesta. Pero el lector que desee conocerlo con

detalle, o hacerlo él mismo, lo encontrará en el Tomo II de nuestra obra *Théorie et pratique des circuits de l'Electronique et des amplificateurs.*

He aquí el resultado:

$$\frac{Z_0}{Z_1} = s = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\alpha'}\right)^2}$$

donde $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ y α' es el nuevo coeficiente de amortiguamiento del circuito oscilante LC, el cual es amortiguado por la lámpara sobre la que está derivado:

$$\alpha' = \frac{R + \dfrac{L}{C\rho}}{2L}$$

donde ρ es la resistencia interna placa-cátodo. Si el circuito estuviera aislado, no unido a la lámpara, se sabe que:

$$\alpha' = \alpha = \frac{R}{2L}.$$

Se tendrá así:

$$s = \sqrt{1 + \left(\frac{2L \cdot 2\pi\Delta f}{R + \dfrac{L}{C\rho}}\right)^2}.$$

— *Puede entonces tratarse de hacer esta selectividad máxima,* siendo L la única variable.

Lo primero que se ocurre es anular la derivada respecto de L. Pero hay una dificultad, y es que C no es constante: se comprende, efectivamente, que, si L varía, es preciso también que C lo haga en sentido inverso para mantener la resonancia. Pero como se verifica que:

$$LC\omega^2 = 1,$$

basta con deducir el valor de C y llevaro a s:

$$C = \frac{1}{L\omega^2}$$

de donde:

$$s = \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi L \cdot \Delta f}{R + \dfrac{L^2\omega^2}{\rho}}\right)^2} = f(L)$$

donde L es ahora *la única variable.*

Pero, para simplificar los cálculos, el de la derivada de esta complicada raíz cuadrada es por completo inútil; basta con buscar el máximo de la expresión:

$$y = \frac{4\pi x \cdot \Delta f}{R + \frac{x^2\omega^2}{\rho}} = \frac{u}{v}.$$

Se tendrá así:

$$y' = \frac{\left(R + \frac{\omega^2 x^2}{\rho}\right) \cdot 4\pi\Delta f - 4\pi x \cdot \Delta f \cdot \frac{2x\omega^2}{\rho}}{v^2} = 0,$$

simplificando, queda:

$$R + \frac{x^2\omega^2}{\rho} - \frac{2x^2\omega^2}{\rho} = 0$$

es decir que:

$$R - \frac{x^2\omega^2}{\rho} = 0$$

$$\frac{x^2\omega^2}{\rho} = R$$

de donde:

$$x = L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\rho R}. \qquad \begin{pmatrix} R \text{ y } \rho \text{ en ohmios} \\ L \text{ en henrios} \end{pmatrix}$$

— *Ahora bien, ¿se tiene un máximo?*

Estudiemos el signo de y'. En el numerador, después de simplificar, queda:

$$R - \frac{x^2\omega^2}{\rho}.$$

Luego, si x es *muy pequeño,* menor que el valor crítico que anula a y', esta derivada será positiva, e y crece. Si x es *muy grande,* mayor que el valor crítico, y' será negativa, luego y decrecerá.

Por tanto, y primero crece y después decrece, luego se tendrá un máximo de y, y, por tanto, también *un máximo de selectividad,* lo cual es muy interesante desde el punto de vista Radio.

CAPITULO IX

OTRA APLICACION DE LAS DERIVADAS ESTUDIO DE LA VARIACION DE LAS FUNCIONES TRAZADO DE LAS CURVAS

71. Marcha a seguir. — Dada una función $y = f(x)$, es interesante representar por una curva las variaciones de esta función, ya que, en efecto, por medio de una curva, se ve rápidamente, de una sola ojeada, los diferentes valores que toma esta función, es decir, todo lo que a esta función le sucede.

— Se verá así:

si la función es positiva o negativa,
si crece o decrece y con qué velocidad,
si es nula o infinita,
si dicha función tiene un máximo o un mínimo, etc.

— En una palabra, el trazado de una curva, que *muestra* las variaciones de una función, es muy instructivo y da mucha información, sobre todo en las aplicaciones prácticas.

— Vamos a dar un gran número de ejemplos, comenzando por casos sencillos y después trazando las curvas de las nuevas funciones, de las cuales hemos calculado anteriormente las derivadas.

— El trazado correcto de las curvas es cuestión de práctica, teniendo una importancia considerable desde el punto de vista de las aplicaciones.

— He aquí la marcha a seguir para estudiar las variaciones de una función $y = f(x)$:

1.° Se hace $x = 0$ y se calcula y.

2.° Se hace $x = \pm \infty$ y se calcula y.

Si y es una fracción que da $\frac{\infty}{\infty}$, que es una indeterminación, deberá dividirse arriba y abajo por la mayor potencia de x, después hacer $x = \pm \infty$ y simplificar.

3.° Se hace $y = 0$ y se deduce x.

Si y es una fracción, se anula el numerador (verificando si el denominador no se anula al mismo tiempo).

4.° Se hace $y = \infty$ sin precisar su signo, y se deduce x.

Si y es una fracción, bastará con anular el denominador.

El signo de ∞ será precisado después, cuando se haya marcado en la tabla si y crece o decrece.

NOTA. — Si y se presenta bajo la forma

$$y = \sqrt{f(x)} \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$$

antes de nada se deberá escribir que la cantidad subradical *debe ser positiva,* lo que dará de inmediato el intervalo restringido en el que debe variar x.

5.° Se calcula la derivada y', y *se simplifica.*

6.° Se anula y' (si es posible), de donde se deduce el o los valores de x.

7.° Se estudia el signo de y' a fin de ver cuándo dicha derivada es positiva o negativa. Se deduce entonces, si hay lugar a ello, *dónde* está el máximo o bien el mínimo.

8.° *En caso de necesidad* se calcula y'' (si su cálculo es fácil), y se estudia su signo reemplazando x por los valores que anulan a y'.

De esta forma se precisará dónde está el máximo o el mínimo. Finalmente, anulando y'' se encuentra el o los puntos de inflexión.

9.° Se construye una tabla, **horizontal,** de las variaciones de y; en ella se reúne, clasificándolas por orden, todos los valores anteriormente encontrados. Esta tabla comprende tres líneas: la primera para x, la segunda para y' y la tercera para y.

Se colocan los signos de y', y, según estos signos, se ponen flechas $\nearrow$ o $\searrow$ en y. Por último, de acuerdo con estas flechas, se deduce si y va hacia $+\infty$ o hacia $-\infty$ (esto, naturalmente, cuando y se haga infinito).

10. Se traza la curva según las indicaciones de la última fila de la tabla. Los valores correspondientes de y' indican, en cada punto, la posición de la curva.

La curva debe ser, si es posible, puesta junto a la tabla, y el eje vertical o de las y deberá ser trazado *en el lugar donde x sea nulo,* al contrario de lo que se hace normalmente, trazándose las asíntotas siempre de puntos.

NOTA. — No estudiaremos aquí la búsqueda de las asíntotas oblicuas, lo cual es una cuestión de geometría analítica pura que se estudiará con detalle en el Tomo VI, reservado a esta materia.

72. EJEMPLOS DE TRAZADOS DE CURVAS

1er Ejemplo. — Trinomio de segundo grado:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Para $x = 0$ $\quad y = c$

» $\quad x = \pm\infty \rightarrow \begin{cases} \text{si } a > 0 & y = +\infty \\ \text{si } a < 0 & y = -\infty \end{cases}$

$y' = 2ax + b$ se anula para $\boxed{x = \dfrac{-b}{2a}}$

Para $x < -\dfrac{b}{2a}$, $\quad y'$ es > 0 o bien < 0

» $x > -\dfrac{b}{2a}$, $\quad y'$ es < 0 o bien > 0

$y'' = 2a \rightarrow$ luego $\begin{cases} \text{si } a > 0 & \text{se tiene un mínimo,} \\ \text{si } a < 0 & \text{se tiene un máximo.} \end{cases}$

El valor del máximo o del mínimo se deduce fácilmente. — Se tiene siempre una parábola de eje vertical; la abscisa del eje de la parábola es la abscisa que corresponde al máximo o al mínimo, es decir $-\dfrac{b}{2a}$. Se sabe por otra parte que

$$y_{max} \text{ o bien } y_{min} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Aplicación:

$$\boxed{y = x^2 - 5x + 6}$$

para $x = 0$ $\quad y = +6$ | $y = 0$ para $x^2 - 5x + 6 = 0$

para $x = \pm\infty$ $\quad y = +\infty$ | de donde $x = +2$ y $x = +3$.

Tenemos

$$y' = 2x - 5 \quad \text{es nula para} \quad x = \frac{5}{2}$$

$$y'' = +2, \quad \text{luego se tiene un mínimo de } y$$

Para $x < \frac{5}{2}$, $y' < 0$ e $y \searrow$,

para $x > \frac{5}{2}$, $y' > 0$ e $y \nearrow$.

El valor del mínimo es

$$y = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = -\frac{1}{4}.$$

Se tiene por tanto la tabla siguiente, no siendo la escala de las y forzosamente la misma que la de las x:

x	$-\infty$		0		2		$\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
y'	∞	$-$		$-$			0	$+$		$+$	∞
y	$+\infty$	$\searrow$	6	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

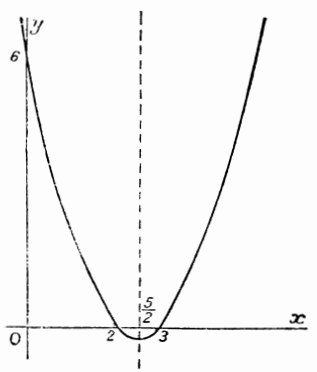

FIG. 51

2.° Ejemplo. — Sea $\boxed{y = \frac{1}{x}}$

Para $x = 0$ $y = \infty$
para $x = \pm \infty$ $y \to 0$.

Se tiene

$$y' = -\frac{1}{x^2} = 0$$

lo que es imposible para un valor finito de x, luego no hay ni máximo ni mínimo.

Si $x = \pm \infty$ $y' = 0$, la curva será horizontal,
si $x = 0$ $y' = \infty$, la curva será vertical.

y' es *siempre* negativa, luego y *decrece continua e indefinidamente.*

Se obtiene la tabla inferior:

x	$-\infty$			0			$+\infty$
y'	0	$-$	$-$	∞	$-$	$-$	0
y	0	↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		0

Desde el momento que y decrece, quiere decir que va hacia $-\infty$. Después, a la derecha de $x = 0$, puesto que y sigue decreciendo, quiere decir que viene de $+\infty$. Por un razonamiento análogo se determinará *siempre* los signos de infinito.

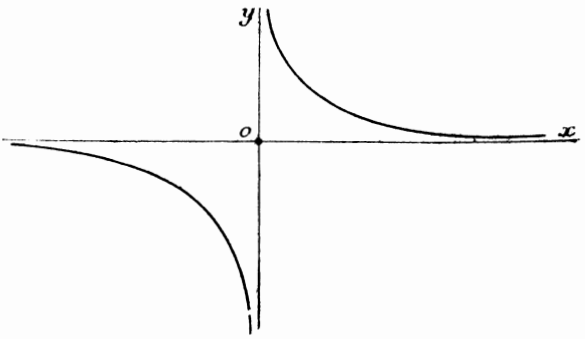

FIG. 52

3er Ejemplo. — Sea $\boxed{y = \dfrac{ax + b}{a'x + b'}}$

Se trata de la función homográfica o hiperbólica en toda su generalidad.

Se tiene, derivando:

$$y = \frac{(a'x + b') \cdot a - (ax + b)a'}{v^2}$$

$$= \frac{ab' - ba'}{(a'x + b')^2} = 0$$

de donde:

$$ab' = ba' \qquad \text{y} \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = m.$$

Llevando este resultado a y:

$$y = \frac{ma' \cdot x + mb'}{a'x + b'} = m\left(\frac{a'x + b'}{a'x + b'}\right)$$

$$= m = \text{const.}$$

lo que es contrario a la hipótesis; esto significa que $ab' - ba'$ *no puede anularse, por lo que no habrá ni máximo ni mínimo.*

La derivada será, pues, siempre positiva o siempre negativa, la función crecerá o decrecerá sin cesar, teniéndose así dos ramas de forma hiperbólica, desplazadas a izquierda o a derecha, hacia arriba o hacia abajo. Precisemos esto mediante un ejemplo.

Ejemplo numérico: $\boxed{y = \dfrac{2x - 1}{4x + 2}}$

Para $x = 0$ $\qquad y = -\dfrac{1}{2}$

para $x = - = \infty$ $\qquad y = \dfrac{\infty}{\infty} = ?$

dividamos arriba y abajo por x, haciendo después $x = \infty$:

$$y = \frac{2 - \frac{1}{x}}{4 + \frac{2}{x}} = \frac{2 - 0}{4 + 0} = \frac{1}{2}.$$

$y = 0$ para $2x - 1 = 0$ o sea $x = \frac{1}{2}$

$y = \infty$ para $4x + 2 = 0$ o sea $x = -\frac{1}{2}$;

$$y' = \frac{(4x + 2)2 - (2x - 1)4}{v^2} = \frac{8x + 4 - 8x + 4}{v^2}$$

$$= \frac{8}{(4x + 2)^2} = 0$$ (imposible para un valor finito de x)

luego no hay ni máximo ni mínimo.

En resumen, que y' es siempre positiva *cualquiera que sea el valor de* x, luego y crece sin cesar.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0	$+\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'	$+$	$+$		$+$		$+$	$+$	$+$
y	$\frac{1}{2}$ $\nearrow$ $+\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$ $\nearrow$ 0		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

Según los signos de y' (positivos siempre), ponemos flechas crecientes para y, que, partiendo de $\frac{1}{2}$, crece hasta $+\infty$; a continuación, puesto que y sigue creciendo, resultará que y viene de $-\infty$.

— Se ve así en qué orden se debe hacer estas últimas operaciones. Una vez que se ha llevado a la tabla los valores numéricos y los signos de y':

1.° Se ponen las flechas correspondientes a y'.

2.° Se ponen signos a los ∞ viendo dónde puede ir y cuando crece o decrece.

— Se obtiene así la curva siguiente (fig. 53).

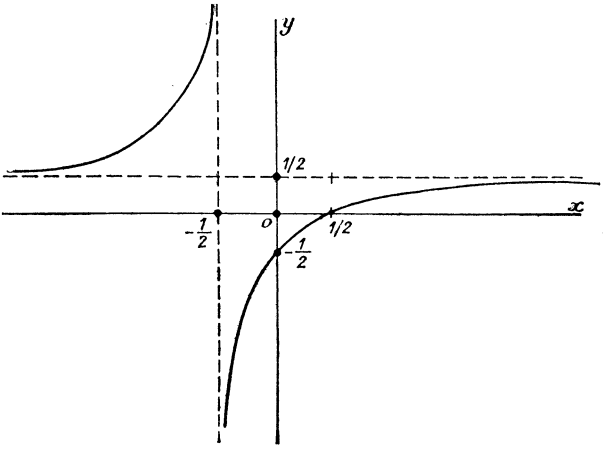

FIG. 53

4.° Ejemplo. — Sea $\boxed{y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

variando el ángulo x entre 0 y 2π.

Para	$x = 0$ ó 2π,	$y = \infty$	para	$x = \pi$,	$y = \infty$
para	$x = \frac{\pi}{2}$,	$y = +1$	para	$x = 3\frac{\pi}{2}$,	$y = -1$

Se tiene

$$y = \frac{1}{u} \quad \text{luego} \quad y' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$$

$$y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \cos x = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = 0$$

es decir $\cos x = 0$ de donde $x = \frac{\pi}{2}$ y $3\frac{\pi}{2}$.

Para $x < \frac{\pi}{2}$, $y' < 0$, $y \searrow$

para $x > \frac{\pi}{2}$, $y' > 0$, $y \nearrow$,

se tiene, pues, un mínimo de y para $x = \frac{\pi}{2}$.

Para $x < 3\frac{\pi}{2}$, $y' > 0$ luego $y \nearrow$

para $x > 3\frac{\pi}{2}$, $y' < 0$ luego $y \searrow$,

se tiene, pues, un máximo de y para $x = 3\frac{\pi}{2}$.

Indicamos en la tabla los signos de y', lo que permite colocar las flechas para cada valor de y. *A continuación* se deduce los signos de los infinitos.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$3\frac{\pi}{2}$		2π
y'	∞	$-$	0	$+$	∞	$+$	0	$-$	∞
y	$+\infty$	$\searrow$	$+1$ min	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	-1 max	$\searrow$	$-\infty$

Puesto que y decrece cuando x varía de 0 a $\frac{\pi}{2}$ quiere decir que y parte de $+\infty$; después y crece partiendo de $+1$, luego y vuelve a dirigirse hacia $+\infty$.

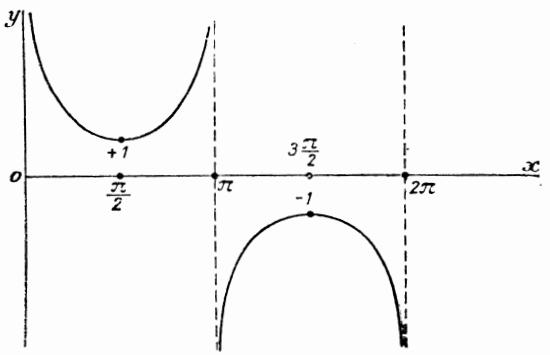

FIG. 54

5.° **Ejemplo.** — Sea $\boxed{y = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}}$

Es preciso, evidentemente, que $1-4x^2>0$, pero $-4x^2+1$ es un trinomio que pasa por un máximo; puede anularse para

$$-4x^2+1=0 \quad \text{de donde} \quad x=\pm\frac{1}{2}$$

será, pues, positivo *entre las raíces.*

Por consecuencia, x *no puede variar más que entre* $-\frac{1}{2}$ y $+\frac{1}{2}$.

Para $x=-\frac{1}{2}, \quad y=\frac{1}{0}=\infty$

para $x=+\frac{1}{2}, \quad y=\frac{1}{0}=\infty$

para $x=0 \qquad y=+1.$

Calculemos y'. Pondremos:

$$y=(1-4x^2)^{-1/2}=u^{-1/2}$$

$$y'=-\frac{1}{2}(1-4x^2)^{-3/2}\cdot(-8x)$$

$$=\frac{4x}{\sqrt{(1-4x^2)^3}}=0$$

de donde

$$4x=0 \quad \text{y} \quad x=0.$$

Para $x<0, \quad y'<0 \quad$ luego $\quad y\searrow$

para $x>0, \quad y'>0 \quad$ luego $\quad y\nearrow,$

Se tiene por tanto un mínimo de y para $x=0$.

De los signos de y' en la tabla se deduce que, cuando x varía de $-\frac{1}{2}$ a 0, y decrece, luego y viene de $+\infty$; después, como y crece, *solamente podrá dirigirse hacia* $+\infty$.

Para $x = +\frac{1}{2}$ ó $-\frac{1}{2}$, $y' = \infty$, luego la curva en estos puntos tiene una tangente vertical; la tabla será:

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\frac{1}{2}$
y'	∞	$-$	0	$+$	∞
y	$+\infty$	$\searrow$	$+1$	$\nearrow$	$+\infty$

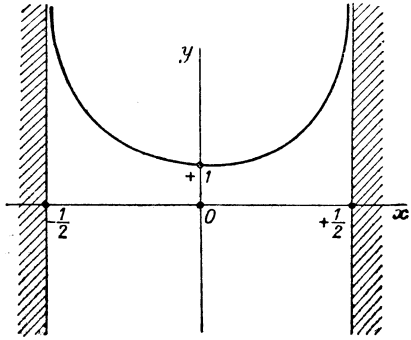

FIG. 55

6.° Ejemplo. — Sea $\boxed{y = \frac{2x}{1 + x^2}}$

Para $x = 0$, $y = 0$

para $x = \pm\infty$ $y = \frac{\infty}{\infty}$ = indeterminación;

dividamos arriba y abajo por la mayor potencia de x, o sea x^2; queda:

$$y = \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{0}{1} = 0,$$

$y = 0$ para $2x = 0$ de donde $x = 0$

$y = \infty$ para $1 + x^2 = 0$ de donde $x^2 = -1$ (imposible).

Anteriormente (núm. 46, ejemplo 4.°) se calculó y':

$$y' = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = 0 \quad \text{de donde} \quad x = \pm 1.$$

La derivada tiene el signo de $-2x^2 + 2$, que es un trinomio que pasa por un máximo y, como se anula para $+1$ y -1, es positivo entre estas dos raíces y negativo exteriormente a ellas. Según estos signos, ponemos las flechas en la tercera línea de la tabla, deduciéndose entonces que hay un mínimo de y para $x = -1$, y un máximo para $x = +1$.

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	$-$
y	0	$\searrow$	-1 (min)	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$ (max)	$\searrow$	0

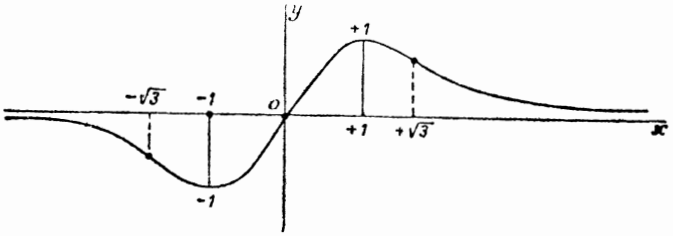

FIG. 56

A título de ejercicio, busquemos los puntos de inflexión anulando y'':

$$y'' = \frac{(1 + x^2)^2(-4x) - (2 - 2x^2)2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4}$$

$$= \frac{(1 + x^2)(-4x) - 4x(2 - 2x^2)}{(1 + x^2)^3} = 0$$

de donde

$$-4x - 4x^3 - 8x + 8x^3 = 0$$

luego

$$4x^3 - 12x = 0$$

$$4x(x^2 - 3) = 0$$

luego habrá tres valores de x $\begin{cases} x = 0 \\ x = +\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$

La naturaleza de la curva muestra claramente que debe haber tres puntos de inflexión.

NOTA. — Esta curva se encuentra en radio cuando se calcula la selectividad de una etapa de alta frecuencia, cuya unión se hace por medio de un circuito tampón sintonizado, situado en el circuito de placa de una lámpara amplificadora, que hemos estudiado en el número 70. (Ver nuestra obra, de editorial Dunod: *Théorie et Pratique des circuits de l'Electronique et des amplificateurs* —5.ª edición—).

7.º Ejemplo. — Sea $\boxed{y = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 2x - 3}}$

Para $x = 0$, $\quad y = \dfrac{0}{-3} = 0$

para $x = \pm\infty$, $\quad y = \dfrac{\infty}{\infty} =$ indeterminación.

Dividiendo arriba y abajo por x^2, queda:

$$y = \frac{1 - \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}} = 1.$$

$y = 0$ para $x^2 - x = 0$ de donde $x(x-1) = 0$ luego $\begin{cases} x = 0 \\ x = +1 \end{cases}$

$y = \infty$ para $x^2 - 2x - 3 = 0$ de donde $x = 3$ luego $x = -1$

Calculemos y':

$$y' = \frac{(x^2 - 2x - 3)(2x - 1) - (x^2 - x)(2x - 2)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 6x + 3}{(x^2 - 2x - 3)^2} = 0$$

de donde $x = -3 - 2\sqrt{3} = -6{,}4$ y $x = -3 + 2\sqrt{3} = +0{,}4$.

El signo de y' está dado por el trinomio $-x^2 - 6x + 3$: pasa por

un máximo y, como se anula dos veces, es positivo *entre* las raíces, o sea para

$$-6{,}4 < x < +0{,}4.$$

Se deduce la tabla inferior, deduciéndose las flechas de los signos de y'.

x	$-\infty$		$-6{,}4$		-1		0		$+0{,}4$		1		3		$+\infty$
y'	$-$		0		$+$	$+$		$+$	0		$-$		$-$		$-$
y	1	$\searrow$	mín	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	máx	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\searrow$	1

Los signos de los infinitos se obtienen de las flechas: si $y \nearrow$ es que y tiende a $+\infty$, e inversamente.

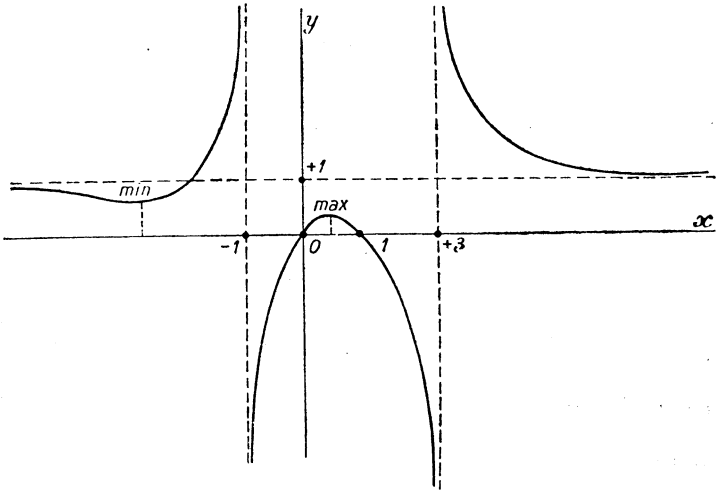

FIG. 57

8.° Ejemplo. — Sea $\boxed{y = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}}$

Para $x = 0$ $y = 0$

para $x = \pm\infty$ $y = +\infty$

$$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$$

(imposible para un valor finito de x, luego no hay ni máximo ni mínimo).

Para $x = 0$, $y' = \infty$, la curva será vertical,

para $x = \pm\infty$, $y' = 0$, la curva será horizontal.

Para $x < 0$, $y' < 0$ e y decrece,

para $x > 0$, $y' > 0$ e y crece.

Se ve que, para $x = 0$, y es nulo y la curva tiene una tangente vertical; será un *punto de retroceso*. No es un mínimo, ya que un mínimo es redondeado y tiene tangente horizontal.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	0	—	∞	+	0
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

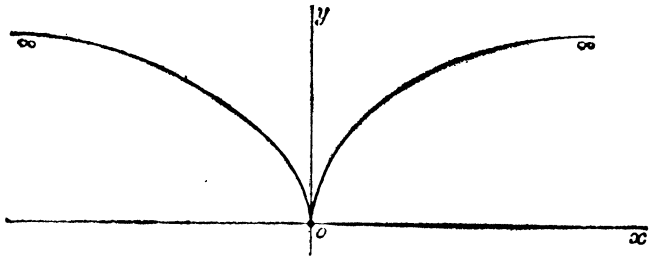

FIG. 58

Se observa en esta curva, cuando x es próximo a 0, cómo la función y varía rápidamente.

9.° Ejemplo. — Curva de la potencia suministrada por un generador eléctrico a una resistencia R derivada en sus bornas.

Sea E su fuerza electromotriz,

r su resistencia interna,

R la resistencia externa, variable.

La potencia está dada por la ley de Joule:

$$P = R \cdot I^2 = R\left(\frac{E}{R + r}\right)^2$$

$$P = \frac{RE^2}{(R + r)^2} = f(R).$$

Para $R = 0 \qquad P = 0$

para $R = \infty \qquad R = \dfrac{\infty}{\infty} = ?$

Luego será

$$P = \frac{RE^2}{R^2 + 2Rr + r^2} = \frac{\dfrac{E^2}{R}}{1 + 2\dfrac{r}{R} + \dfrac{r^2}{R^2}} = 0.$$

Precedentemente se calculó la derivada en el capítulo dedicado a la búsqueda de los máximos (ver en el § 51 el problema de la potencia de un generador), encontrándose:

$$P' = \frac{E^2(r - R)}{(R + r)^3} = 0 \qquad \text{luego} \qquad R = r.$$

Se vio que correspondía a un máximo $\left(P_{max} = \dfrac{E^2}{4r}\right)$.

Para

$$R = 0 \qquad P' = \frac{E^2 r}{r^3} = \frac{E^2}{r^2} = \operatorname{tg} \alpha,$$

luego la curva parte bajo este ángulo α, que no es ni nulo ni igual a $\dfrac{\pi}{2}$.

R	0		r		$+\infty$
P'	$\dfrac{E^2}{r^2}$	+	0	—	0
P	0	↗	$\dfrac{E^2}{4r}$ max	↘	0

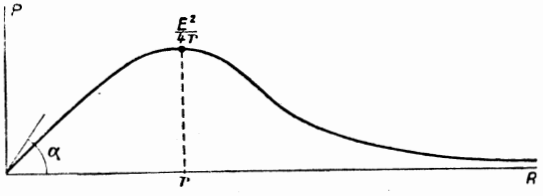

FIG. 59

La condición $R = r$ puede no ser respetada rigurosamente, pudiendo desplazarse ligeramente en uno u otro sentido, puesto que un máximo o un mínimo es siempre suave y poco acentuado.

Se ve que el punto de inflexión tiene lugar para $R = 2r$.

73. Curvas de las nuevas funciones.

10.° Ejemplo. — Función exponencial:

$$\boxed{y = e^x} \qquad\qquad \boxed{y = e^{-x}}$$

Para

$x = 0 \qquad y = e^0 = 1$

$x = +\infty \qquad y = +\infty$

$x = -\infty \qquad y = \dfrac{1}{e^{\infty}} = 0$

$$y' = e^x = 0$$

(imposible para un valor finito de x, luego ni máximo ni mínimo). y' es siempre positiva, luego y crece indefinidamente.

Si $x = +\infty$, $y' = +\infty$, curva vertical,

si $x = -\infty$, $y' = 0$, curva horizontal.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	0	$+$	1	$+$	$+\infty$
y	0	⟶	1	⟶	$+\infty$

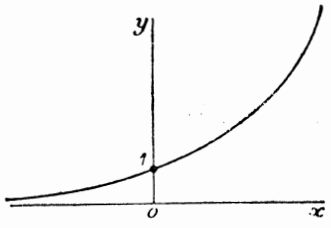

FIG. 60

$x' = 0 \qquad y = e^0 = 1$

$x = +\infty \qquad y = \dfrac{1}{e^{\infty}} = 0$

$x = -\infty \qquad y = e^{\infty} = +\infty$

$$y' = -e^{-x} = 0$$

(imposible para un valor finito de x, luego ni máximo ni mínimo). y' es siempre negativa, luego y decrece indefinidamente.

Si $x = +\infty$, $y = -\dfrac{1}{e^{\infty}} = 0$, curva horizontal,

si $x = -\infty$, $y' = -e^{\infty} = -\infty$, curva vertical.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	1	$-$	0
y	$+\infty$	⟶	1	⟶	0

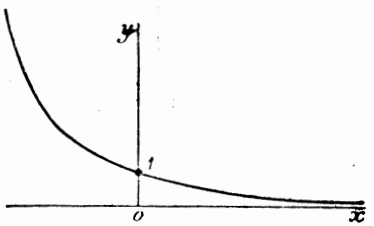

FIG. 61

11.° Ejemplo. — Función logarítmica.

$$\boxed{y = \operatorname{Log} x}$$

donde x varía de 0 a $+\infty$, ya que los números negativos no tienen logaritmos.

— Se recuerda que los números >1 tienen un logaritmo neperiano positivo, mientras que los <1 lo tienen negativo. También conviene recordar que, conforme x disminuye y tiende a 0, su logaritmo neperiano aumenta y tiende a infinito.

Para

$x = 0$ $\quad y = \operatorname{Log} 0 = -\infty$
$x = e$ $\quad y = 1$
$x = 0$ $\quad y \to -\infty$
$x = +\infty$ $\quad y \to +\infty$,

$y' = \dfrac{1}{x} = 0$ (imposible para un valor *finito* de x, luego ni máximo ni mínimo).

Si

$x = 0$ $\quad y' = \infty$ y la curva es vertical
$x = +\infty$ $\quad y' = 0$ y la curva es horizontal
$x = 1$ $\quad y' = 1$ y la tangente a la curva está inclinada 45°.

siendo x siempre positivo, será y' siempre >0, luego y crece indefinidamente, lo mismo que los logaritmos decimales.

x	0		1		$+\infty$
y'	∞	+	1	+	0
y	$-\infty$	⟶	0	⟶	$+\infty$

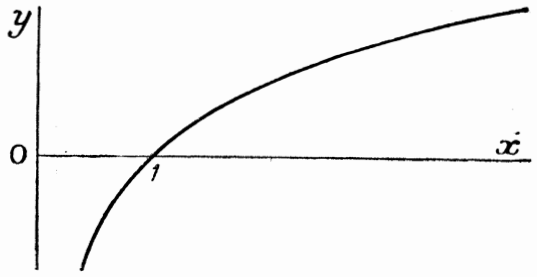

FIG. 62

Se recuerda, en efecto, que el logaritmo neperiano de un número x es la superficie comprendida entre la curva $y = \frac{1}{x}$, la abscisa 1 y la abscisa x. Veremos en el Tomo III (Cálculo integral, § 12), cuando calculemos las superficies de las curvas, que, para $x = +\infty$, la superficie de la curva $y = \frac{1}{x}$ se hace infinita; por eso $\text{Log}\,\infty = +\infty$.

12.° Ejemplo. — Funciones arco seno y arco coseno.

$$\boxed{y = \text{arc sen}\, x}$$

donde x varía de -1 a $+1$ e y varía de $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$.

Para

$x = 0 \qquad y = 0,\ \pi,\ 2\pi$

$x = -1 \qquad y = \frac{3\pi}{2}$ o $-\frac{\pi}{2}$

$x = +1 \qquad y = +\frac{\pi}{2}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$$

imposible para un valor finito de x, luego ni máx. ni mín.

Si $x = 0 \qquad y' = 1 \qquad \alpha = 45°$

$x = \pm 1 \qquad y' = \infty,$ curva vertical

y' siempre es *positiva*, luego y crece indefinidamente.

x	-1		0		$+1$
y'	∞	$+\ +$	1	$+\ +$	∞
y	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$+\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{y = \text{arc cos}\, x}$$

donde x varía de -1 a $+1$ e y varía de π a 0.

Para

$x = 0 \qquad y = \frac{\pi}{2}$

$x = -1 \qquad y = \pi$

$x = +1 \qquad y = 0 \quad$ ó $\quad 2\pi$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$$

imposible para un valor finito de x, luego ni máx. ni mín.

Si $x = 0 \qquad y' = -1 \qquad \alpha = 135°$

$x = \pm 1 \qquad y' = \infty,$ curva vertical

y' siempre es *negativa*, luego decrece indefinidamente.

x	-1		0		$+1$
y'	∞	$-\ -$	-1	$-\ -$	∞
y	π	↘	$\frac{\pi}{2}$	↘	0

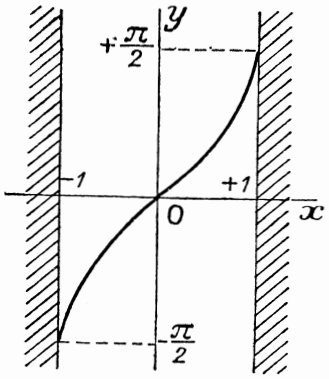

FIG. 63

Girando la figura 90° se obtiene la curva del seno.

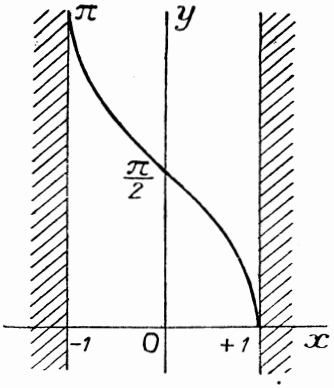

FIG. 64

Girando la figura 90° se obtiene la curva del coseno.

NOTA. — En realidad, se tendría una infinidad de curvas situadas *por encima y por debajo de las precedentes,* puesto que hay una infinidad de ángulos que tienen, para el seno y el coseno, un valor dado.

13.° Ejemplo. — Función arco tangente.

$$\boxed{y = \operatorname{arc\,tg} x}$$

en donde x varía de $-\infty$ a $+\infty$.

Para

$$x = 0 \qquad y = 0$$

$$x = -\infty \qquad y = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = +\infty \qquad y = +\frac{\pi}{2}.$$

Derivando, se tiene $y' = \dfrac{1}{1 + x^2} = 0$ (imposible para un valor finito de x, luego ni máximo ni mínimo).

Para $x = 0 \qquad y' = 1 \qquad \alpha = 45°$

$x = \pm\infty \qquad y' = \dfrac{1}{\infty} = 0,$ y la curva es horizontal.

Cualquiera que sea x, la derivada y' es siempre positiva, luego la función y crece indefinidamente.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	0	$+$	1	$+$	0
y	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\frac{\pi}{2}$

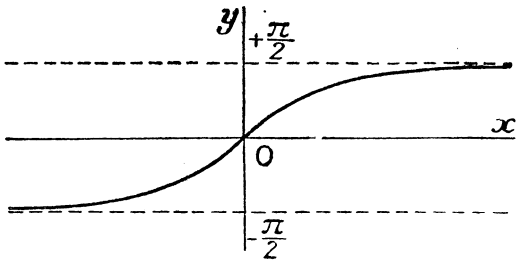

FIG. 65

Funciones hiperbólicas. — La definición de las funciones hiperbólicas y el trazado de sus curvas de variación deberán ser dados en el Cálculo integral (Tomo III), *cuando el lector sepa qué es lo que estas funciones representan. Pero esto sólo puede hacerse tras el cálculo de las superficies, en las aplicaciones del cálculo integral, contrariamente a como se hace habitualmente...*

74. CURVAS CUALESQUIERA

14.° Ejemplo. — Sea $\boxed{y = \frac{1}{3}(x+1)^3(3x-2)^2}$

Para $x = 0 \quad y = \frac{4}{3}$

$x = -\infty \quad y = -\infty$

$x = +\infty \quad y = +\infty$

$y = 0$ para $\begin{cases} x+1=0 & \text{de donde } x=-1 \\ \text{y} \\ 3x-2=0 & \text{de donde } x=\frac{2}{3}. \end{cases}$

Será:

$$y' = \frac{1}{3}[(3x-2)^2 \cdot 3(x+1)^3 + (x+1)^3 \cdot 2(3x-2) \cdot 3]$$
$$= (3x-2)(x+1)^2[(3x-2) + 2(x+1)]$$
$$= 5x(3x-2)(x+1)^2.$$

Que es nula para $\begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \\ x = -1 \end{cases}$ $\left(\begin{matrix}\text{para} \quad x = \pm\infty \\ y' = \infty \\ \text{y la curva es vertical}\end{matrix}\right)$.

Pero $(x+1)^2$ es siempre positivo, luego la derivada tendrá el signo de los otros dos factores:

$$5x(3x-2) = 15x^2 - 10x.$$

Pero esto es un trinomio que pasa por un mínimo, y, como se anula dos veces $\left(\text{para } 0 \text{ y para } \frac{2}{3}\right)$, es negativo *entre las raíces* y positivo en el exterior.

Colocados estos signos en la tabla y las flechas indicadas para y, se ve que, para $x = -1$, y' se anula *sin cambiar de signo*; y, como la tangente a la curva es horizontal, se tendrá un *punto de inflexión*.

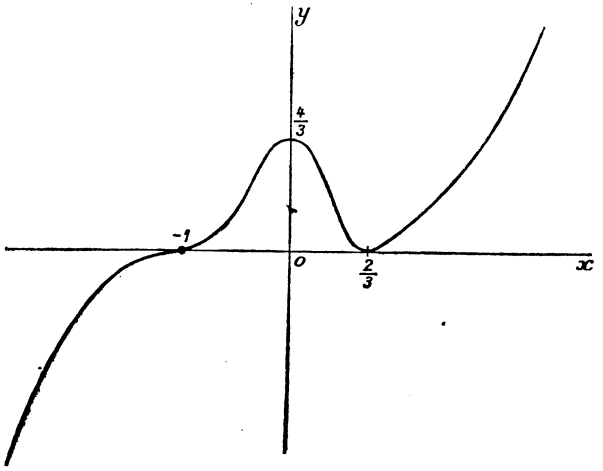

FIG. 66

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'	∞	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	∞
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$ max	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$+\infty$

15.° Ejemplo. — Sea $\boxed{y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}}$

Para $x = 0 \qquad y = 1$

$$x = \pm\infty, \quad y = \frac{\infty}{\infty} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1},$$

dividamos arriba y abajo por x^3:

$$y = \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$y = 0$ para $(x+1)^3 = 0$ de donde $x = -1$

$y = \infty$ para $(x-1)^2 = 0$ de donde $x = 1$.

Calculemos y':

$$y' = \frac{(x-1)^2 3(x+1)^2 - (x+1)^3 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)3(x+1)^2 - (x+1)^3 \cdot 2}{(x-1)^3} = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}[3(x-1) - 2(x+1)]$$

$$= \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3} = 0 \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 5. \end{cases}$$

Estudiemos el signo de y': será el mismo que el de $\frac{x-5}{(x-1)^3}$.

Construyamos una pequeña tabla auxiliar para estudiar este signo, pues un cubo puede ser negativo:

x	$-\infty$		1		5	$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$
$x-1$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^3$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
y'		$+$	∞	$-$	0	$+$

El coeficiente $(x+1)^2$ es siempre positivo, luego y' se anula para $x=-1$ sin cambiar de signo, luego en este punto habrá un punto de inflexión con tangente horizontal.

Se tendrá, pues, la tabla siguiente:

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+5$		$+\infty$
y'	1	$+$	0	$+$	$+$	∞	$-$	0	$+$	1	
y	∞	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{2}$ min	$\nearrow$	∞

De 0 a $+1$, y crece, luego va hacia $+\infty$, y, de $+1$ a $+5$ y decrece, luego y viene de $+\infty$.

Así, para $x=5$, el infinito no cambia de signo.

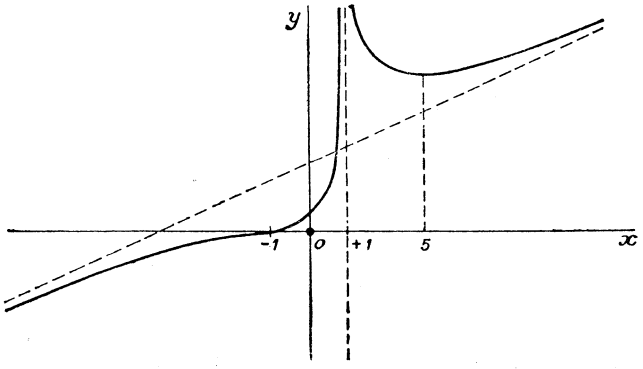

FIG. 67

Para $x = \pm\infty$, $y' = \frac{\infty}{\infty}$, y, desarrollando el numerador, el término más elevado es x^3, lo mismo que en el denominador; entonces, dividiendo ariba y abajo por x^3, queda 1, que es la pendiente de la curva para $x = \pm\infty$.

En realidad, esta curva tiene una asíntota oblicua (que es $y = x + 5$), pero esto es una cuestión puramente de geometría analítica, que se estudiará con detalle en el Tomo VI. Preferimos no tratarlo aquí a fin de no mezclar demasiadas cosas.

16.º Ejemplo. — Sea $\boxed{y = \operatorname{sen}^2 x}$

El ángulo x debe variar de 0 a 2π; más allá de este valor, y vuelve a tomar los mismos valores y la curva es periódica.

Ponemos

$$y = u^2 \quad \text{luego} \quad y' = 2u \cdot u'$$

por tanto

$$y' = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen} 2x = 0$$

de donde

$$2x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi\ldots$$

luego

$$x = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi\ldots.$$

Habrá, pues, una serie de máximos y de mínimos.

Calculemos y'':

$$y'' = 2 \cos 2x.$$

Para $2x = 0$ ó $x = 0$, $y'' > 0$, luego se tiene un *mínimo* de y,

» $2x = \pi$ ó $x = \frac{\pi}{2}$, $y'' < 0$, » » *máximo* de y,

» $2x = 2\pi$ ó $x = \pi$, $y'' > 0$, » » *mínimo* de y,

» $2x = 3\pi$ ó $x = 3\frac{\pi}{2}$, $y'' < 0$, » » *máximo* de y,

» $2x = 4\pi$ ó $x = 2\pi$, $y'' > 0$, » » *mínimo* de y,

por encima de este valor se repiten las mismas cantidades, siendo la curva periódica.

Para $x = 0$ ó 2π $y = 0$ | Para $x = \pi$ $y = 0$

» $x = \frac{\pi}{2}$ $y = 1$ | » $x = 3\frac{\pi}{2}$ $y = +1$.

Se tiene la tabla siguiente:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$3\frac{\pi}{2}$		2π
y'	0		0		0		0		0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
	mín		máx		mín		máx		mín

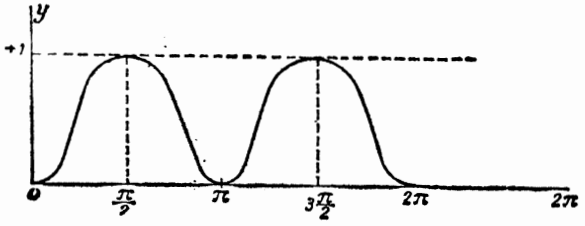

FIG. 68

17.° Ejemplo. — Sea $\boxed{y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$

Es preciso lo primero que $\frac{1-x}{1+x} > 0$

o bien

$$\frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)^2} > 0 \quad \text{es decir} \quad \frac{1-x^2}{(1+x)^2} > 0;$$

luego debe tenerse

$$1 - x^2 > 0.$$

Pero $-x^2 + 1$ es un trinomio incompleto de segundo grado que pasa por un máximo y se anula para -1 y $+1$: es, por tanto, positivo entre las raíces, bastando con hacer variar x entre -1 y $+1$.

Para $x = 0$ $y = 0$

» $x = -1$ $y = \infty$ y para $x = +1$ $y = 0$.

Calculemos y', pero, previamente, escribamos y en la forma

$$y = \sqrt{\frac{x^2(1-x)}{1+x}} = \sqrt{\frac{x^2 - x^3}{1+x}} = \sqrt{z},$$

luego

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot z' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2(1-x)}{1+x}}} \cdot \frac{(1+x)(2x-3x^2) - (x^2 - x^3)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{x^2(1-x)}} \cdot \frac{2x + 2x^2 - 3x^2 - 3x^3 - x^3 + x^3}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{x\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-2x^3 - 2x^2 + 2x}{\sqrt{(1+x)^3}}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-x(x^2 + x - 1)}{\sqrt{(1+x)(1+x)^2}} = \frac{-x^2 - x + 1}{(1+x)\sqrt{(1-x)(1+x)}}$$

$$= \frac{-x^2 - x + 1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = 0$$

de donde

$$-x^2 - x + 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{-2}$$

es decir que

$$x' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -1{,}6 \qquad \text{y} \qquad x'' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = +0{,}6.$$

Solamente este último valor está comprendido en el intervalo entre -1 y $+1$ donde x varía.

El denominador de y' será positivo únicamente para

$$-1 < x < 1,$$

teniendo la derivada, pues, el signo del numerador.

Ahora bien, éste es un trinomio que pasa por un máximo, siendo positivo entre las raíces y negativo fuera de ellas. *Conforme a estos signos* ponemos para y las correspondientes flechas en la tabla, lo que nos muestra que

para	$x < 0{,}6$	$y' > 0$	luego	$y \nearrow$
para	$x > 0{,}6$	$y' < 0$	luego	$y \searrow$.

Se tiene, pues, un máximo para $x = 0{,}6$.

Calculemos finalmente la derivada para -1, 0 y $+1$:

para $x = 0$ $\quad y' = 1 = \operatorname{tg} \alpha$ $\quad \alpha = 45°$
para $x = -1$ $\quad y' = \infty$, $\quad$ la curva es vertical
para $x = +1$ $\quad y' = \infty$, $\quad$ la tangente a la curva es vertical.

Se tiene así la tabla siguiente:

x	-1		0		$0{,}6$		$+1$
y'	∞	$+$	$+1$	$+$	0	$-$	∞
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$0{,}3$ (max)	$\searrow$	0

Para $x < 0$, y crece, luego y viene de $-\infty$.

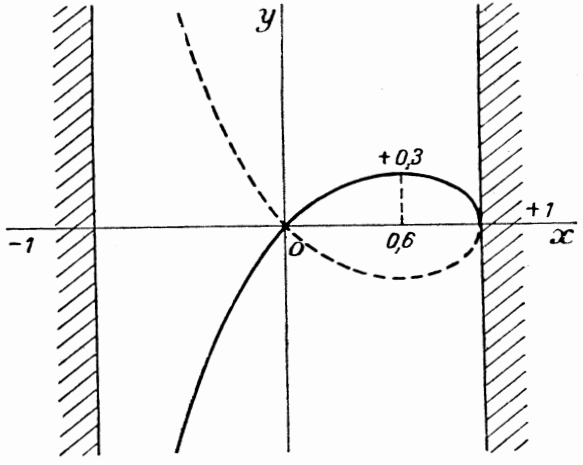

FIG. 69

Se obtiene así la curva de trazo lleno. Pero, si se hubiera tomado el signo — delante del radical de y:

$$y = -x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

se ve que y cambia de signo sin cambiar de valor, lo cual daría la curva de puntos.

Esta curva se llama una *estrofoide*.

18.° Ejemplo. — *En electricidad y en radio se estudia a menudo un circuito que consta de una bobina, cuya inductancia es L, en serie con un condensador de capacidad C. Se pide trazar la curva de la impedancia suponiendo nula la resistencia de la bobina, variando la pulsación* ω *de* 0 *a* $+\infty$ ($\omega = 2\pi f$).

Se demuestra que la impedancia Z es igual a:

$$\boxed{Z = L\omega - \frac{1}{C\omega}}$$

Para $\omega = 0$ $\quad Z = -\infty$

» $\omega = +\infty$ $\quad Z = +\infty$

$Z = 0$ para $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$, de donde $LC\omega^2 = 1$, que es la condición de resonancia, y

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

La derivada $Z' = L + \frac{1}{C\omega^2}$ no puede ser nula, luego no hay ni máximo ni mínimo.

Además, Z' es siempre positiva, luego Z *crece indefinidamente.*

Para $\omega = 0$ $\quad Z' = \infty$ la tangente a la curva es vertical.

» $\omega = \infty$ $\quad Z' = L = \operatorname{tg} \alpha$

» $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\quad Z' = 2L = \operatorname{tg} \gamma$.

Luego la tabla es:

ω	0		$\frac{1}{\sqrt{LC}}$		∞
Z'	∞	$+$	$2L$	$+$	L
Z	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Se ve que la impedancia es negativa a la izquierda de la resonancia y positiva a la derecha.

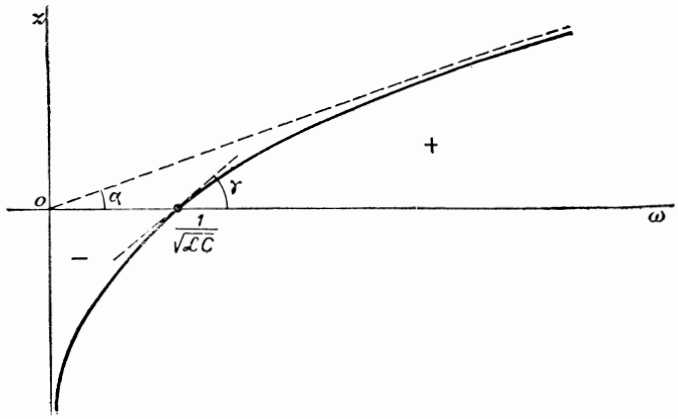

FIG. 70

19.º Ejemplo. — *Trazar la curva de la impedancia de un circuito eléctrico que consta de una bobina, cuya inductancia (o coeficiente de autoinducción) es L, y una capacidad C en paralelo, siendo la pulsación* ω *variable de 0 a* ∞. *Se supone nula la resistencia de la bobina.*

— Se demuestra en electricidad y en radio que la impedancia de tal circuito, llamado *circuito tampón*, es:

$$\left| Z = \frac{L\omega}{1 - LC\omega^2} \right| = f(\omega).$$

Para $\omega = 0$ $\quad Z = 0$

» $\omega = +\infty$ $\quad Z = \frac{\infty}{\infty}$.

Dividamos arriba y abajo por ω^2:

$$Z = \frac{\frac{L}{\omega}}{\frac{1}{\omega^2} - LC} = \frac{0}{-LC} = 0.$$

Para $LC\omega^2 = 1$ se tiene $Z = \infty$, de donde $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, que es la condición de resonancia.

— Anulemos la derivada Z′ respecto de ω:

$$Z' = \frac{(1 - LC\omega^2)L + L\omega \cdot 2LC\omega}{v^2}$$

$$= \frac{L + L^3C\omega^2}{v^2} = \frac{L(1 + LC\omega^2)}{(1 - LC\omega^2)^2} = 0;$$

el numerador no puede anularse, luego no hay ni máximo ni mínimo. Z′ es siempre positiva, y Z *crece indefinidamente.*

Para

$$\omega = 0 \qquad Z' = L = \operatorname{tg} \alpha.$$

Luego se tiene la siguiente tabla:

ω	0			$\frac{1}{\sqrt{LC}}$			$+\infty$
Z′	L	+	+	∞	+	+	0
Z	0	↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		0

Se ve que la impedancia es primero positiva y después negativa.

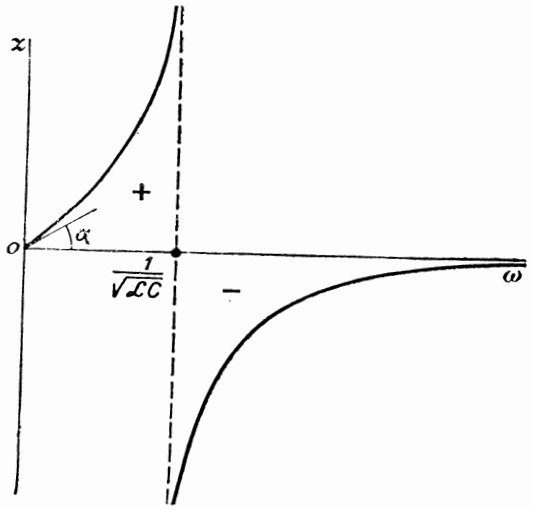

FIG. 71

La impedancia es infinita para $LC\omega^2 = 1$, de ahí el nombre de circuito tampón. Este montaje se emplea, corrientemente, en radio. Se da una aplicación de él en el problema del párrafo 70, cap. VIII.

20.º Ejemplo. — Sea la función $y = -2x^4 + 3x^2 - 5$.

Para $x = 0$ $y = -5$

» $x = \pm\infty$ $y = -\infty$

$$y' = -8x^3 + 6x = 2x(3 - 4x^2) = 0$$

es decir que,

1.º $x = 0$

2.º— $3 - 4x^2 = 0$ luego $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$-4x^2 + 3$ es un trinomio que pasa por un máximo y que se anula dos veces, siendo, pues, positivo entre las raíces. Y para tener el signo de y' basta con multiplicar $3 - 4x^2$ por x,

y' es > 0 para $x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

y' es < 0 para $-\frac{\sqrt{3}}{2} < x < 0$

y' es > 0 para $0 < x < +\frac{\sqrt{3}}{2}$

y y' es < 0 para $x > +\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Para $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ $y = -\frac{31}{8}$.

Se tiene, por tanto, la siguiente tabla:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		0		$+\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$-\frac{31}{8}$	↘	-5	↗	$-\frac{31}{8}$	↘	$-\infty$

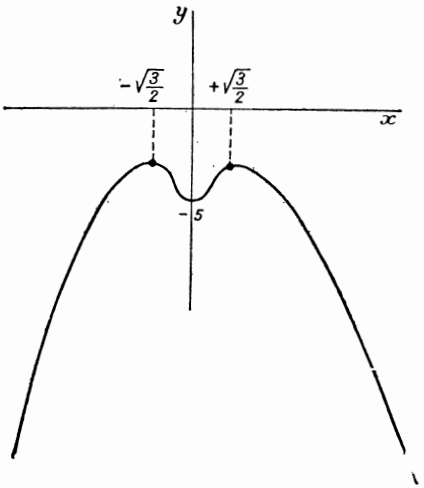

FIG. 72

CAPITULO X

OTRAS DERIVADAS

75. Derivadas de las funciones implícitas. — Una función de la forma $y = f(x)$ se dice que es *explícita,* por encontrarse y a un lado del signo igual y x al otro lado; y y x están así separadas la una de la otra.

Mientras que una función *implícita* se presenta bajo la forma:

$$f(x, y) = 0,$$

donde x es la variable e y la función. En suma que, en una función implícita, x e y figuran en un mismo miembro, por ejemplo:

$$2x^2y - \frac{x}{y^2} = 0$$

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

$$4x^2 - 2xy - y^2 - 5y - 1 = 0 \qquad \text{etc.}$$

— Para calcular y' basta con calcular la derivada de cada término (producto o cociente) sin olvidar que, siendo y función de x, su derivada es y' (siendo 1 la derivada de x). A continuación se despeja y'.

Comencemos por un ejemplo simple.

Primer ejemplo. — Sea la ecuación de la circunferencia

$$x^2 - y^2 - R^2 = 0.$$

Derivemos *respecto de* x (*pero, siendo* y *función de* x, *la derivada de* y^2 *es* $2\,y \cdot y'$):

$$2x + 2y \cdot y' - 0 = 0$$

de donde

$$2yy' = -2x$$

y despejando y':

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

— Aquí la ecuación propuesta podría ponerse en forma explícita (pero esto es raro):

$$y^2 = R^2 - x^2 \qquad \text{y} \qquad y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

derivando

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

Naturalmente, se encuentra el mismo resultado.

Segundo ejemplo. — Sea la función implícita:

$$2x^2y - \frac{x}{y^2} = 0$$

Derivemos, teniendo en cuenta que el primer término es un producto y el segundo un cociente:

$$(y \cdot 4x + 2x^2 \cdot y') - \left(\frac{y^2 - x \cdot 2yy'}{y^4}\right) = 0$$

que queda

$$4xy^5 + 2x^2y^4y' - y^2 + 2xyy' = 0$$

sacando factor común y':

$$y'(2x^2y^4 + 2xy) = y^2 - 4xy^5$$

de donde

$$y' = \frac{y^2 - 4xy^5}{2x^2y^4 + 2xy} = \frac{y - 4xy^4}{2x(xy^3 + 1)}.$$

76. Derivada segunda de una función implícita. — Se deriva y' término a término, siguiendo el mismo principio que anteriormente; después se reemplaza y' por su valor y se simplifica.

Ejemplo. — Sea $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Derivando respecto de x, tenemos:

$$2b^2x - 2a^2y \cdot y' = 0$$

despejando y'

$$y' = \frac{b^2x}{a^2y}.$$

Derivemos todavía este cociente $\frac{u}{v}$:

$$y'' = \frac{a^2y \cdot b^2 - b^2x \cdot a^2y'}{(a^2y)^2} = \frac{a^2b^2y - a^2b^2x\left(\frac{b^2x}{a^2y}\right)}{a^4y^2}$$

$$= \frac{a^2b^2(a^2y^2 - b^2x^2)}{a^4y^3 \cdot a^2y} = \frac{b^2(a^2y^2 - b^2x^2)}{a^4y^3},$$

lo cual se simplifica, ya que, según la ecuación inicial:

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

luego

$$y'' = \frac{b^2(-a^2b^2)}{a^4y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

NOTA. — Veremos en el § 84 otro método, más sencillo, para calcular la derivada de una función implícita.

77. Derivadas de las funciones paramétricas. — Otra manera, que a menudo es más cómoda, de dar la ecuación de una curva es ponerla en forma *paramétrica*, es decir que x e y son expresadas separadamente en función de un parámetro, que puede ser bien un ángulo θ, el tiempo t, o cualquier otro.

Así, la ecuación de una curva se dará en la forma:

$$y = f(\theta)$$
$$x = \varphi(\theta).$$

Por ejemplo, en una circunferencia es muy fácil expresar las coordenadas x e y de un punto en función de un parámetro θ, que es el ángulo que forma el radio (fig. 73) con el eje de las x:

$$y = R \operatorname{sen} \theta$$
$$x = R \cos \theta.$$

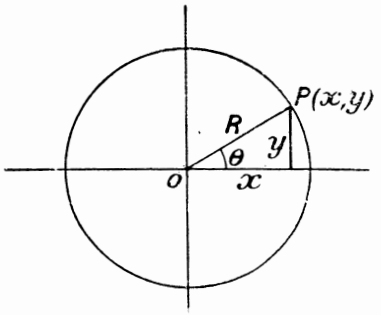

FIG. 73

Se trata de calcular la derivada de y respecto de x. Pero, si x varía en una cantidad Δx, θ lo hace $\Delta\theta$ e y en Δy, pudiéndose escribir, dividiendo arriba y abajo por $\Delta\theta$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta \theta}}{\frac{\Delta x}{\Delta \theta}}.$$

Pasemos al límite, cuando Δx, $\Delta\theta$, Δy tienden a 0:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0} = \frac{\lim \frac{\Delta y}{\Delta\theta \to 0}}{\lim \frac{\Delta x}{\Delta\theta \to 0}}$$

es decir

$$\boxed{y_x' = \frac{y_\theta'}{x_\theta'}}$$

es, pues, el cociente de dos derivadas respecto al parámetro.

Esta fórmula nos servirá en geometría analítica.

Primer ejemplo. — Sea la ecuación paramétrica del círculo:

$$x = \mathrm{R}\cos\theta$$
$$y = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Se tiene

$$x_\theta' = -\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$y_\theta' = \mathrm{R}\cos\theta$$

de donde

$$y_x' = \frac{\mathrm{R}\cos\theta}{-\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\theta} = -\frac{1}{\mathrm{tg}\,\theta}.$$

Cuando se puede, se expresa esta derivada en función de x y de y solamente, obteniéndose:

$$\frac{y}{x} = \frac{\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{R}\cos\theta} = \mathrm{tg}\,\theta,$$

de donde

$$y' = -\frac{x}{y},$$

resultado ya hallado en el párrafo 75.

Segundo ejemplo. — La ecuación paramétrica de la cicloide es (ver el Tomo III de Cálculo integral, párrafo 50):

$$x = a(\theta - \mathrm{sen}\,\theta)$$
$$y = a(1 - \cos\theta).$$

Derivando

$$x' = a(1 - \cos\theta)$$
$$y' = a \operatorname{sen}\theta$$

de donde

$$y_x' = \frac{a \operatorname{sen}\theta}{a(1 - \cos\theta)}.$$

78. Derivada segunda de una función paramétrica. — Sea

$$y_x' = \frac{y_\theta'}{x_\theta'}.$$

Se quiere calcular la derivada de este cociente *respecto de* x. Pero

la derivada de y_θ' respecto de x es $y_\theta'' \cdot \theta_x'$ *(pues* θ *es función de* x*)*
la derivada de x_θ' respecto de x es $x_\theta'' \cdot \theta_x'$.

Se tiene pues

$$y_x'' = \frac{x' \cdot y'' \cdot \theta' - y' \cdot x'' \cdot \theta'}{x'^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2} \cdot \theta_x'$$

y como

$$\theta_x' = \frac{1}{x_\theta'} \qquad \left(\text{en efecto, se cumple} \quad \frac{\Delta\theta}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta\theta}}\right),$$

se deduce que

$$y_x'' = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2} \cdot \frac{1}{x_\theta'}$$

es decir

$$\boxed{y_x'' = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}}$$

Ejemplo. — En el caso de la cicloide se encontró anteriormente

$$x' = a(1 - \cos\theta) \quad \text{de donde} \quad x'' = a \operatorname{sen}\theta$$
$$y' = a \operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad y'' = a \cos\theta.$$

Apliquemos la fórmula anterior que daba y'':

$$y_x'' = \frac{a(1-\cos\theta)a\cos\theta - a\operatorname{sen}\theta \cdot a\operatorname{sen}\theta}{a^3(1-\cos\theta)^3}$$

$$= \frac{\cos\theta - (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}{a(1-\cos\theta)^3} = \frac{\cos\theta - 1}{a(1-\cos\theta)^3}$$

$$= -\frac{1}{a(1-\cos\theta)^2}$$

NOTA. — En el Tomo II calcularemos las diferenciales primeras y segundas de todas estas funciones especiales, implícitas, paramétricas, etc.

79. Derivadas logarítmicas. — He aquí ahora un nuevo procedimiento, que es, en suma, un procedimiento indirecto para calcular la derivada de una función cualquiera $y = f(x)$. Este procedimiento es la mayor parte del tiempo *más cómodo y más rápido* que el procedimiento normal, y es, sobre todo, recomendado cuando se tiene un producto, un cociente y, principalmente, un exponente (función de x).

— Este procedimiento consiste en tomar primero el logaritmo neperiano de los dos miembros de la función

$$y = f(x)$$

o sea

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{Log} f(x),$$

a continuación se deriva, de la forma habitual, respecto de x. Ahora bien, la derivada de $\operatorname{Log} y$ *respecto de* x es $\frac{1}{y} \cdot y'$ (ya que y es función de x). *Basta entonces con multiplicar los dos miembros por* y *para obtener* y'. Se puede seguidamente, si ello es posible, reemplazar y por su valor.

— Algunos sencillos ejemplos permitirán una mejor comprensión.

Primer ejemplo. — Sea $y = \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2}$.

Tomando logaritmos:

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{Log}\frac{(x+1)^3}{(x-2)^2} = \operatorname{Log}(x+1)^3 - \operatorname{Log}(x-2)^2$$

$$= 3\operatorname{Log}(x+1) - 2\operatorname{Log}(x-2).$$

Derivemos

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 3 \cdot \frac{1}{x+1} - 2 \cdot \frac{1}{x-2}$$

de donde

$$y' = y\left[\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-2}\right] = y\left[\frac{3(x-2)-2(x+1)}{(x+1)(x-2)}\right]$$

$$= \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2} \cdot \frac{x-8}{(x+1)(x-2)} = \frac{(x+1)^2(x-8)}{(x-2)^3}$$

Segundo ejemplo. — Sea $y = x \cdot \operatorname{arc\,sen} x$.

Tomemos logaritmos neperianos:

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{Log}(x \cdot \operatorname{arc\,sen} x)$$
$$= \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} \operatorname{arc\,sen} x,$$

derivemos

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{\operatorname{arc\,sen} x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

de donde

$$y' = y\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(\operatorname{arc\,sen} x)\sqrt{1-x^2}}\right),$$

y, reemplazando y por su valor, queda:

$$y' = \operatorname{arc\,sen} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Tercer ejemplo. — Sea $y = x^{\operatorname{sen} x}$.

Tendremos

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{Log}(x^{\operatorname{sen} x}) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{Log} x$$

derivemos

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \operatorname{Log} x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{x}$$

de donde

$$y' = y\left(\cos x \operatorname{Log} x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$

$$= x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x \cdot \operatorname{Log} x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right).$$

NOTA I. — En el cálculo diferencial veremos de calcular las diferenciales logarítmicas, lo que conduce a los cálculos de errores en las medidas.

NOTA II. — Otra aplicación de estos cálculos será el de las expresiones indeterminadas, uno de cuyos términos está en el exponente. Se ve que, tomando logaritmos, el exponente *desaparece, no quedando más que un producto fácil de estudiar.*

NOTA III. — El empleo de la derivada logarítmica es *muy cómodo* cuando la función $y = f(x)$ tiene un exponente que es función de x.

— En efecto, tomando logaritmos neperianos, *el exponente se transforma en coeficiente*; derivando a continuación los dos miembros, no hay más que tomar la derivada de un producto.

Hagamos un ejemplo.

Ejemplo. — Sea $y = x^x$.

Tomemos logaritmos neperianos:

$$\text{Log } y = \text{Log } (x^x) = x \cdot \text{Log } x;$$

derivemos *respecto de* x:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \text{Log } x \cdot 1 + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \text{Log } x + 1$$

de donde

$$y' = y(1 + \text{Log } x) = x^x(1 + \text{Log } x).$$

Fácilmente se ve la comodidad de este método.

80. Otra aplicación de la derivada logartímica. — Se ha visto al principio del estudio de las derivadas que la derivada de $y = x^m$ es $y' = m \cdot x^{m-1}$. Nosotros lo hemos demostrado directamente haciendo primeramente $m = 1$, después $m = 2$, $m = 3$, y generalizando después para dar la fórmula general.

$$y' = m \cdot x^{m-1}$$

diciendo que es válida *cualquiera que sea el exponente* m.

— Pero ahora, por medio de la derivada logarítmica, podemos demostrar inmediatamente esta fórmula general, *cualquiera que sea* m, lo cual aún no ha sido hecho.

Primer caso: *m entero y positivo.*

Se tiene

$$y = x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot x \ldots x}_{m \text{ veces}}$$

de donde, tomando logaritmos:

$$\operatorname{Log} y = \underbrace{\operatorname{Log} x + \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} x + \ldots + \operatorname{Log} x}_{m \text{ veces}}$$

$$= m \cdot \operatorname{Log} x,$$

derivemos

$$\frac{1}{y} \cdot y' = m \cdot \frac{1}{x}$$

de donde

$$y' = y \cdot m \frac{1}{x} = m \cdot x^m \cdot \frac{1}{x}$$

$$\boxed{y' = m \cdot x^{m-1}} \qquad \text{c.q.d.}$$

Segundo caso: *m es fraccionario y positivo.*

Pongamos

$$m = \frac{p}{r}$$

luego será

$$y = x^{\frac{p}{r}}.$$

Elevemos a la potencia r:

$$y^r = x^p$$

de donde, tomando logaritmos neperianos:

$$\operatorname{Log} y^r = \operatorname{Log} x^p \quad \text{o sea} \quad r \cdot \operatorname{Log} y = p \cdot \operatorname{Log} x.$$

Derivemos

$$r \frac{1}{y} \cdot y' = p \cdot \frac{1}{x}$$

de donde

$$y' = y \cdot \frac{p}{r} \cdot \frac{1}{x} = x^{\frac{p}{r}} \cdot \frac{p}{r} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{p}{r} \cdot x^{\frac{p}{r}-1} = m \cdot x^{m-1} \qquad \text{c.q.d.}$$

Tercer caso: *m es entero y negativo.*

Pongamos

$$m = -p$$

luego será

$$y = x^{-p}$$

de donde

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{Log} x^{-p} = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{x^p}\right)$$

$$= \operatorname{Log} 1 - \operatorname{Log} x^p$$

$$= -\operatorname{Log}(x^p) = -p \cdot \operatorname{Log} x.$$

Derivemos

$$\frac{1}{x} \cdot y' = -p \cdot \frac{1}{x}$$

de donde

$$y' = y\left(-p \cdot \frac{1}{x}\right) = -p \cdot x^{-p} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= -p \cdot x^{-p-1}$$

y, finalmente,

$$y' = m \cdot x^{m-1}. \qquad \text{c.q.d.}$$

Lo mismo se haría si m fuera negativo y fraccionario.

81. Derivadas de las funciones compuestas. — Se llama *función compuesta* a una función que está formada... de varias partes, siendo cada una de ellas función de x, y donde x es la única variable. En el caso más sencillo se presenta bajo la forma:

$$y = f(u, v) \qquad \text{con} \quad \begin{cases} u = f(x) \\ \text{y} \\ v = \varphi(x). \end{cases}$$

por ejemplo:

$$y = u \cdot v \qquad y = \frac{u}{v}$$
$$y = u + v \qquad y = u^v \qquad \text{etc.}$$

expresiones en las cuales u y v son funciones de x, que es la *única variable.*

— Pero puede haber más de dos partes y la función y puede escribirse, en el caso de tres partes:

$$y = f(u, v, w) \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} u = f(x) \\ v = \varphi(x) \\ w = g(x) \end{cases}$$

Por ejemplo:

$$y = u \cdot v \cdot w \qquad y = u^{v^w} \qquad \text{etc.}$$

— *Se trata de calcular la derivada de y respecto de x.* Encontraremos una fórmula absolutamente general que se aplicará a todos los casos. Volveremos a encontrar ciertas fórmulas de derivadas que ya hemos calculado con anterioridad.

— Tomemos primero el caso más simple, en que la función y es de la forma

$$y = f(u, v),$$

— Si x varía en Δx, u lo hace en Δu, v en Δv e y en Δy (todos estos Δ son, por otra parte, desconocidos, lo que no tiene importancia porque todos van a hacerse nulos); u se convierte en u_1 y v en v_1.

El nuevo valor de y es

$$y_1 = y + \Delta y = f(u_1, v_1) = f(u + \Delta u, v + \Delta v),$$

La variación de y es, pues:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_1 - y \\ &= f(u_1, v_1) - f(u, v) \\ &= f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v). \end{aligned}$$

Sumemos y restemos $f(u, v + \Delta v)$:

$$\Delta y = [f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)] + [f(u, v + \Delta v) - f(u, v)].$$

El primer corchete representa la variación de una función donde u ha variado en Δu, y el segundo representa la variación de una función donde v ha variado en Δv.

Multipliquemos y dividamos el primer corchete por Δu y el segundo por Δv, lo que no cambia nada:

$$\Delta y = \frac{[f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v-\Delta v)]}{\Delta u} \cdot \Delta u + \frac{[f(u, v+\Delta v) - f(u, v)]}{\Delta v} \cdot \Delta v$$

dividamos todo finalmente por Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{f(u, v+\Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

—Pasemos ahora al límite: si Δx tiende a 0, lo mismo le ocurre a Δu, así como Δv y a Δy, teniéndose:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0} = \lim \left[\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u \to 0} \right] \cdot \lim \frac{\Delta u}{\Delta x \to 0} + \lim \left[\frac{f(u, v+\Delta v) - f(u, v)}{\Delta v \to 0} \right] \cdot \lim \frac{\Delta v}{\Delta x \to 0}.$$

—Se ve así que, en el primer corchete, sólo u ha variado y el numerador es el incremento de la función donde v queda constante; y, como este incremento de la función está dividido por Δu, es, pues, la derivada de la función y respecto de u considerada como única variable, *siendo v considerada como constante*; escribiremos entonces f_u' o bien y_u'.

En el segundo corchete sólo ha variado v, y su numerador es el incremento de la función donde u queda constante; y como este incremento de la función está dividido por Δv, es pues la derivada de la función y respecto de v considerada como única variable, *siendo u considerada como constante*; escribiremos entonces f_v' o bien y_v'.

—En el límite queda, pues, cuando $\Delta x \to 0$:

$$\boxed{y_x' = f_u' \cdot u' + f_u' \cdot v'}$$

f_u' y f_v' se llaman *derivadas parciales*; esto quiere decir que, *cuando se toma la derivada con relación a una letra, se considera la otra como constante.*

82. Ejemplos. — 1.° Sea

$$y = u \cdot v = f(u, v)$$

donde u y v son funciones de x, que es la única variable.

Se tiene

$$f_u' = v$$
$$f_u' = u.$$

Por tanto

$$y' = v \cdot u' + u \cdot v'.$$

Se vuelve a encontrar así la fórmula conocida de la derivada de un producto

2.° Sea

$$y = \frac{u}{v} = f(u, v).$$

Se tiene

$$f_u' = \frac{1}{v} \quad \text{y} \quad f_v' = -\frac{u}{v^2}.$$

Por tanto se obtiene, aplicando la fórmula general:

$$y' = \frac{1}{v} \cdot u' - \frac{u}{v^2} \cdot v'$$

reduzcamos a común denominador:

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Se obtiene de nuevo la fórmula conocida.

3.° Sea $y = u^v$, donde u y v son funciones de x.

Para calcular f_u' se supone v constante, es decir como si se quisiera tomar la derivada de u^m:

$$f_u' = v \cdot u^{v-1}.$$

Para calcular f_v' se supone u constante, y es como si se quisiera tomar la derivada de a^x, que es $a^x \cdot \operatorname{Log} a$, lo que da:

$$f_v' = u^v \cdot \operatorname{Log} u.$$

Se tendrá, pues, aplicando la fórmula general:

$$\boxed{y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \operatorname{Log} u \cdot v'}$$

esta fórmula no hay que saberla de memoria, siendo preciso cada vez rehacer los cálculos.

Aplicaciones:

1.° Sea

$$y = (\operatorname{sen} x)^x = u^v = f(u, v)$$

luego será

$$u' = \cos x \qquad \text{y} \qquad v' = 1.$$

Tendremos

$$f_u' = x \cdot (\operatorname{sen} x)^{x-1} \qquad \text{(es la derivada de } x^m\text{)}$$
$$f_v' = (\operatorname{sen} x)^x \cdot \operatorname{Log} \operatorname{sen} x \qquad \text{(es la derivada de } a^x\text{)}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} y_x' &= f_u' \cdot u' + f_v' \cdot v' \\ &= x\,(\operatorname{sen} x)^{x-1} \cdot \cos x + (\operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{Log} \operatorname{sen} x \\ &= (\operatorname{sen} x)^x \left(\frac{x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} + \operatorname{Log} \operatorname{sen} x \right). \end{aligned}$$

2.° Sea

$$y = x^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = u^v = f(u, v).$$

Tendremos

$$u' = 1 \qquad v' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \cos x$$

$$f_u' = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, x^{\frac{1}{\operatorname{sen} x} - 1} \qquad \text{y} \qquad f_v' = x^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \operatorname{Log} x.$$

Luego

$$y' = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, x^{\frac{1}{\operatorname{sen} x} - 1} \cdot 1 + x^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \cdot \operatorname{Log} x \left(-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \right)$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}}{\operatorname{sen}^2 x} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x \cdot \operatorname{Log} x \right).$$

83. Generalización. — Si se tuviera

$$y = f(u, v, w)$$

un cálculo idéntico al que acabamos de hacer daría

$$\boxed{y' = f_u' \cdot u' + f_v' \cdot v' + f'_w \cdot w'}$$

Ejemplo: Sea $y = u \cdot v \cdot w = f(u, v, w)$, donde u, v y w son funciones de x.

Será

$$f'_u = v \cdot w \qquad f_v' = u \cdot w \qquad f'_w = u \cdot v$$

Luego

$$y' = v \cdot w \cdot u' + u \cdot w\, v' + u \cdot v \cdot w'.$$

No creemos que sea necesario hacer un ejemplo completo de esta fórmula tan sencilla.

84. Caso particular: otro procedimiento para calcular la derivada de una función implícita f(x, y) = 0. — Hemos calculado ya, en el párrafo 75, la derivada de tal función, por un procedimiento directo, derivando término a término. Pero es quizás más rápido operar de la siguiente forma.

Se puede, en efecto, considerar la expresión $f(x, y) = 0$ como una función compuesta, ya que y es función de x. Siendo esta función compuesta constantemente nula, su derivada también lo será. Se tendrá, pues, aplicando la fórmula de las funciones compuestas:

$$0 = f'_x(x, y) \cdot x' + f'_y(x, y) \cdot y'$$

pero $x' = 1$, luego:

$$0 = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot y'$$

de donde la fórmula final:

$$\boxed{y' = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}}$$

Es, en suma, el cociente, cambiado de signo, de la derivada parcial respecto de x por la derivada parcial respecto de y.

— Volvamos a tomar los ejemplos ya estudiados anteriormente de funciones implícitas y veremos que se vuelve a encontrar los mismos resultados, pero más rápidamente.

Ejemplos:

1.° Sea

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0 = f(x, y)$$

donde x es la variable e y la función.

— Se tiene, tomando derivadas parciales:

$$f'_x = 2x \qquad \text{y} \qquad f'_y = 2y$$

de donde

$$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

(valor ya encontrado en el § 75).

2.° Sea

$$2x^2y - \frac{x}{y^2} = 0.$$

Tenemos

$$f'_x = 4xy - \frac{1}{y^2}$$

$$f'_y = 2x^2 - x(-2y^{-3}) = 2x^2 + \frac{2x}{y^3}.$$

De donde

$$y' = -\frac{4xy - \frac{1}{y^2}}{2x^2 + \frac{2x}{y^3}} = -\frac{4xy^4 - y}{2x^2y^2 + 2x}$$

$$= \frac{y - 4xy^4}{2x(xy^3 + 1)}$$

(valor ya obtenido en el § 75).

3.° Calcular la derivada de

$$x^y = y^x$$

donde x es la función e y la variable.

— Pongámosla en la forma normal:

$$x^y - y^x = 0 = f(x, y)$$

luego

$$f'_x = y \cdot x^{y-1} - y^x \operatorname{Log} y.$$

En efecto, la derivada de x^y respecto de x es la derivada de x^m, que es $m \cdot x^{m-1}$, y la derivada de y^x respecto de x (donde y es constante), es la derivada de a^x, que es $a^x \cdot \operatorname{Log} a$.

Del mismo modo, y por razones análogas:

$$f'_y = x^y \cdot \operatorname{Log} x - xy^{x-1}.$$

En efecto, la derivada de x^y respecto de y es la derivada de a^x, es decir $a^x \cdot \operatorname{Log} a$ (en nuestro caso $x^y \cdot \operatorname{Log} x$); y la derivada de y^x respecto de x es la derivada de y^m, es decir $m \cdot y^{m-1}$ (en nuestro caso $x \cdot y^{x-1}$).

Se tendrá, pues

$$y' = -\frac{yx^{y-1} - y^x \cdot \operatorname{Log} y}{x^y \cdot \operatorname{Log} x - xy^{x-1}} = -\frac{y\dfrac{x^y}{x} - y^x \cdot \operatorname{Log} y}{x^y \cdot \operatorname{Log} x - x\dfrac{y^x}{y}},$$

ahora bien, según la ecuación inicial,

$$x^y = y^x,$$

llevando este valor a y' queda, dividiendo arriba y abajo por x^y, *o bien por* y^x, puesto que son iguales:

$$y' = -\frac{\dfrac{y}{x} - \operatorname{Log} y}{\operatorname{Log} x - \dfrac{x}{y}} = \frac{y}{x} \cdot \frac{y - x \operatorname{Log} y}{x - y \operatorname{Log} x}:$$

Es preciso simplificar siempre estas expresiones que parecen tan complicadas, llegándose a expresiones sencillas como la anterior.

85. Nota final. — Todas las fórmulas de derivadas y todos los procedimientos de cálculo que se han visto en este tomo nos servirán en el Tomo II para el cálculo de las *diferenciales. El Tomo I sirve de introducción al Cálculo direfencial.*

El Tomo II comprenderá:

1.° *Los desarrollos en serie* y sus aplicaciones.
2.° *El estudio de las series.*
3.° *El cálculo de los complejos,* estudio matemático detallado.
4.° *El cálculo diferencial* y sus aplicaciones.

Las diferenciales de las funciones de varias variables independientes. Aplicaciones prácticas. Cálculo de errores. Los radios de curvatura.

Estas cuatro partes contienen *numerosos ejemplos explicados con detalle.*

Otras aplicaciones relativas al cálculo integral no se podrán estudiar hasta los Tomos III y IV.

LISTA RECAPITULATIVA

DE LAS

FORMULAS DEL TOMO I

Desarrollo de $(a \pm b)^m$, (para m entero y positivo):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$
$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$
$$(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6.$$

Los coeficientes están dados por el triángulo de PASCAL (ver cap. II).

Determinantes:

Sea el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x y z:

$$a\,x + b\,z = c$$
$$a'x + b'z = c'$$

se tiene inmediatamente

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

Caso de tres ecuaciones con tres incégnitas:

$$ax + bz + ct = d$$
$$a'x + b'z + c't = d'$$
$$a''x + b''z + c''t = d''$$

tenemos en seguida que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}} = \frac{db'c'' + bc'd'' + cd'b'' - cb'd'' - bd'c'' - dc'b''}{ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - cb'a'' - ba'c'' - ac'b''}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}}{D} = \frac{ad'c'' + dc'a'' + ca'd'' - cd'a'' - da'c'' - ac'd''}{D}$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{D} = \frac{ab'd'' + bd'a'' + da'b'' - db'a'' - ba'd'' - ad'b''}{D}$$

Función exponencial y logarítmica:

$$\text{límite de } \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \to e = 2{,}718\,281\,828\ldots \qquad \text{si} \quad m \to \infty$$

$$\text{Log } x = 2{,}302\,59 \log x$$
$$\text{Log } (a \cdot b) = \text{Log } a + \text{Log } b$$
$$\text{Log } \frac{a}{b} = \text{Log } a - \text{Log } b$$
$$\text{Log } a^n = n \cdot \text{Log } a$$
$$\text{Log } e = 1$$
$$\text{Log } 0 = -\infty$$
$$\text{Log } 1 = 0$$

Se puede siempre escribir $a^x = e^{bx}$ (con $b = \text{Log } a$).

Derivadas:

Sea $y = f(x)$, se tiene $y' = \text{límite de } \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \searrow 0$

$$y = x \qquad y' = 1$$

$$y = ax \qquad y' = a$$

$$y = x^m \qquad y' = mx^{m-1}$$

$$y = \frac{1}{x} \qquad y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \sqrt{x} \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = ax^m \qquad y' = max^{m-1}$$

$$y = \frac{a}{x} \qquad y' = -\frac{a}{x^2}$$

$$y = a\sqrt{x} \qquad y' = \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \operatorname{sen} x \qquad y' = \cos x$$

$$y = \cos x \qquad y' = -\operatorname{sen} x$$

$$y = \operatorname{tg} x \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{o bien} \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$y = a^x \qquad y' = a^x \operatorname{Log} a$$

$$y = e^x \qquad y' = e^x$$

$$y = \operatorname{Log} x \qquad y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \operatorname{arc\,sen} x \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \operatorname{arc\,cos} x \qquad y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \operatorname{arc\,tg} x \qquad y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \searrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Función de función simple:

$$y = f(u) \qquad \text{con} \qquad u = \varphi(x)$$

se tiene

$$y_x' = y_u' \cdot u_x'$$

Función de función generalizada:

$$y = f(u) \qquad \text{con} \qquad u = \varphi(v) \qquad v = g(z) \qquad z = j(x)$$

se tiene

$$y_x' = y_u' \cdot u_v' \cdot v_z' \cdot z_x'$$

$$y = u + v + w \qquad y' = u' + v' + w'$$

$$y = u \cdot v \qquad y' = vu' + uv'$$

$$y = \frac{u}{v} \qquad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$y = u^v \qquad y' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \operatorname{Log} u \cdot v'.$$

Pendiente de la tangente a una curva:

En un punto de una curva, la pendiente de la tangente a dicha curva es:

$$\operatorname{tg} \alpha = y'$$

en la cual se reemplaza x por la abscisa del punto considerado.

Crecimiento y decrecimiento de una función:

si $y' < 0$ $y \searrow$

si $y' > 0$ $y \nearrow$ (e inversamente).

Máximo y mínimo de una función:

$$y' = 0$$

(a condición de que y' cambie de signo antes y después del valor crítico de x que anula a y').

Máximo o mínimo ($y' = 0$, cambiando de signo a una y otra parte):

si $y'' > 0$ y es mínimo

si $y'' < 0$ y es máximo.

Puntos de inflexión:

$$y'' = 0$$

a condición de que y' no cambie de signo a una y otra parte del punto considerado.

Otras derivadas:

Funciones implícitas:

$$f(x, y) = 0 \qquad y_x' = -\frac{f_x'}{f_y'}.$$

Funciones paramétricas:

$$y = f(\theta) \qquad x = \varphi(\theta)$$

$$y_x' = \frac{y_\theta'}{x_\theta'} \qquad y_x'' = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}.$$

Funciones compuestas:

$y = f(u, v)$	$y_x' = f_u' \cdot u' + f_v' \cdot v'$
$y = f(u, v, w)$	$y_x' = f_u' \cdot u' + f_v' \cdot v' + f'_w \cdot w'$
$y = u \cdot v \cdot w$	$y_x' = vwu' + uwv' + uvw'$
$y = u^v$	$y_x' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \operatorname{Log} u \cdot v'.$

EJERCICIOS A RESOLVER

CAPITULO II

Cálculo de $(a + b)^m$ y determinantes

Desarrollar:

2-1. $(a + b)^8$

2-2. $(2a + 3b)^2$

2-3. $(2a - 3b)^2$

2-4. $(2a + 3b)^3$

2-5. $(2a - 3b)^3$

2-6. $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^4$

2-7. $\left(\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}b\right)^3$

2-8. $(2a + 3b + 4c)^2$

2-9. $(2a + 3b + 4c)^3$

2-10. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4$

2-11. $\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^5$

2-12. $(e^{2x} - e^{-3x})^6$

Resolver por determinantes los sistemas de ecuaciones:

2-13.
$$\begin{vmatrix} 2x - 1 = 3 - 4z \\ z + 5 = 6 - 5x \end{vmatrix}$$

2-14.
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{z} \\ 3 - \frac{5}{x} = \frac{4}{5} - \frac{3}{z} \end{vmatrix}$$

2-15.
$$\begin{vmatrix} x + 2y = 1 \\ 3y - 4z = 2 \\ 6x + 3z = 0 \end{vmatrix}$$

2-16.
$$\begin{vmatrix} x + y + z = 0 \\ y + z - x = 1 \\ z - x - y = 2. \end{vmatrix}$$

Calcular los determinantes (*y compararlos entre ellos*).

Aplicar los teoremas de los párrafos 10 y 11.

2-17.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

2-18.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

2-19.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

2-20.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

2-21.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2-22.
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2-23.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

2-24.
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2-25.
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$$

2-26.
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

2-27.
$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}$$

2-28.
$$\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 16 \end{vmatrix}$$

CAPITULO III

Funciones exponencial y logarítmica

3-1. Poner la función $y = 5^{2x}$ *bajo la forma* $y = e^{bx}$ y calcular b.

3-2. Sea la función $y = 5^{2x}$; sacar x en función de y.

3-3. Sea $\log_{10} y = 5$; calcular y.
Sea Log $y = 5$; calcular y.

3-4. Sea $y = K\left(1 - e^{-\frac{x}{3}}\right)$; calcular x en función de y.

3-5. Sea $y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; calcular x en función de y.

3-6. Sea $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{1 + x^2}$; calcular x en función de y.

3-7. Calcular $y = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ para $n = 2$, 3 y 4.

3-8. Sea $y = \operatorname{sen} e^{2x}$; deducir x en función de y.

3-9. Sea $y = \cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{LC}} + \varphi\right)$; deducir x en función de y.

3-10. Demostrar que $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$.

3-11. Trazar la curva $y = 2^x + 2^{-x}$.

3-12. Demostrar que $2^{x-1} = \dfrac{1}{2} 2^x$.

3-13. Trazar la curva $y = \text{Log } \sqrt{x}$.

CAPITULO VI

Derivadas

Calcular las derivadas de las expresiones siguientes (*y simplificar*):

6-1. $y = (3x^2 + 5x - 1)^4$

6-2. $y = \sqrt{5x^2 - 3x}$

6-3. $y = \dfrac{1}{3x^4 - 2x^2 + 1}$

6-4. $y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2}$

6-5. $y = \operatorname{sen}^2 x^2$

6-6. $y = tg \sqrt{1 - 4x^2}$

6-7. $y = \dfrac{1}{\cos \sqrt{x}}$

6-8. $y = e^{\operatorname{sen}^2 x}$

6-9. $y = e^{\sqrt{1-3x}}$

6-10. $y = e^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$

6-11. $y = \operatorname{Log} \operatorname{sen} 4x$

6-12. $y = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \sqrt{x}$

6-13. $y = \operatorname{Log} e^{\operatorname{sen} x}$

6-14. $y = \operatorname{arc\,sen} \operatorname{Log} 2x$

6-15. $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}$

6-16. $y = e^{4x} \cdot \cos 3x$

6-17. $y = e^{-5x} \cdot \operatorname{tg} 5x$

6-18. $y = e^{2x} \cdot \operatorname{Log} 3x$

6-19. $y = \operatorname{arc\,sen} x \cdot \operatorname{arc\,sen} 2x$

6-20. $y = \left(\operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}\right) \cdot \dfrac{1}{x}$

6-21. $y = \dfrac{\operatorname{arc\,tg} 2x}{\operatorname{arc\,tg} 3x}$

6-22. $y = \dfrac{\operatorname{Log} 2x}{\operatorname{Log} 3x}$

6-23. $y = \dfrac{\operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} x}{x}$

6-24. $y = (x + 1)\sqrt{x + 2}$

6-25. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x + 1}$

6-26. $y = \sqrt{1 + x} \cdot \sqrt[3]{1 - x}$

6-27. $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

6-28. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$

6-29. $y = \operatorname{Log} x^2 \sqrt{1 - x}$

6-30. $y = \operatorname{Log} \sqrt[4]{1 + x^2}$

6-31. $y = \operatorname{Log} (x + \sqrt{1 + x^2})$

6-32. $y = \left(\operatorname{Log} \dfrac{1}{x}\right)^3$

6-33. $y = (\text{Log}\sqrt{1-4x^2})^4$

6-34. $y = (\text{log}\, e^x)^5$

6-35. $y = e^{x \cdot \text{sen}\, x}$

6-36. $y = e^{x^2}$

6-37. $y = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

6-38. $y = \text{sen}\left(\frac{1}{x} \cdot e^x\right)$

6-39. $y = \cos e^{2x}$

6-40. $y = \text{tg}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

6-41. $y = \text{sen}^4 \frac{1}{x}$

6-42. $y = \cos^3 \sqrt{x}$

6-43. $y = \text{tg}^5 \frac{1}{2x}$

6-44. $y = \text{sen}^3 x^4$

6-45. $y = \cos^4 \frac{1}{1+x^2}$

6-46. $y = \text{tg}^3 e^x$

6-47. $y = (\text{Log tg}\, x) \cdot \text{sen}\, 2x$

6-48. $y = e^{-2x} \cdot \cos 3x$

6-49. $y = \text{sen}^2 x \cdot \text{tg}^2 2x$

6-50. $y = \text{arc sen}\, e^{2x}$

6-51. $y = \text{arc cos (Log}\, x)$

6-52. $y = \text{arc tg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)$

6-53. $y = \text{arc sen}\frac{1}{\sqrt{x}}$

6-54. $y = \text{arc tg}\frac{1}{\sqrt{x}}$

6-55. $y = \text{arc tg (sen}\, x)$

6-56. $y = \text{arc tg (tg}\, x)$

6-57. $y = \text{arc sen (sen}\, x)$

6-58. $y = \text{sen}^2[(x-1) \cdot \sqrt{x}]$

6-59. $y = \text{tg}^2\,(\text{Log}\, x^2)$

6-60. $y = 4^x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

6-61. $y = 4\,\text{sen}\, x + 2\cos x$

6-62. $y = \cos^4 \frac{1}{x}$

6-63. $y = \text{sen}\, 2x + 2\cos x$

6-64. $y = \text{Log (Log}\, x)$

6-65. $y = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$

6-66. $y = x\,(\text{Log}\, x)^2$

6-67. $y = (\sqrt{x} + 2x)^2$

6-68. $y = 7^{\frac{1}{x}}$

6-69. $y = 2^{\sqrt{x}}$

6-70. $y = a^{\sqrt{x^2+1}}$

6-71. $y = 2^{\frac{1}{\text{Log}\, x}}$

6-72. $y = \text{Log}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

6-73. $y = \text{Log}\,(x^2\sqrt{1+x^2})$

6-74. $y = (\text{Log}\sqrt{1-x})^3$

6-75. $y = \text{sen}^4 4x$

6-76. $y = 2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, 2x$

6-77. $y = \text{Log}\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}$

6-78. $y = \text{Log}\sqrt{\dfrac{1 + \text{sen}\, x}{1 - \text{sen}\, x}}$

6-79. $y = \dfrac{\text{Log}\, x}{x}$

6-80. $y = \dfrac{x\sqrt{4x + 1}}{(2x + 1)^3}$

6-81. $y = 6\,\text{sen}^2 x \cdot \cos 2x$

6-82. $y = \dfrac{1}{\text{tg}^2\sqrt{1 - x^2}}$

6-83. $y = \dfrac{1}{\text{sen}^4 (x^2 - 1)}$

6-84. $y = \text{sen}\, 2x \cdot \text{tg}\dfrac{1}{x}$

6-85. $y = e^{\text{sen}\, 2x} \cdot \text{sen}\, 2x$

6-86. $y = e^{\text{tg}\, x} \cdot \cos x^2$

6-87. $y = \text{arc sen}\, 2^x$

6-88. $y = (\text{arc tg}\sqrt{x})^4$.

Calcular las derivadas segundas de:

6-89. $y = e^{2x} \cdot \cos 3x$

6-90. $y = \text{sen}\, 2x \cdot \text{sen}\, 3x$

6-91. $y = \text{arc tg}\sqrt{x}$

6-92. $y = \text{Log}\dfrac{1}{x}$

6-93. $y = \text{Log}\sqrt{x}$

6-94. $y = x^4 + 4\sqrt{x}$

6-95. $y = \dfrac{x}{x - 1}$

6-96. $y = x^2 \cdot e^{-x}$

6-97. $y = x^2\,\text{Log}\, x$

6-98. $y = \text{sen}^2 x$

6-99. $y = \text{tg}^2 x$

6-100. $y = e^{4x}$

6-101. $y = \dfrac{1}{x} \cdot \text{Log}\, x$

6-102. $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$

6-103. $y = \dfrac{4x}{1 + x^2}$

6-104. $y = \dfrac{x^3}{(x - 1)^2}$

6-105. $y = \text{sen}^2\dfrac{x}{2}$

6-106. $y = x \cdot \text{arc tg}\, x$

Calcular la derivada tercera de:

6-107. $y = e^{x^2}$

6-108. $y = x^3 e^x$

6-109. $y = x \cdot \text{arc tg}\, x$

6-110. $y = e^{-x} \cdot \text{sen}\, 2x$

6-111. $y = \sqrt[3]{x^2}$

6-112. $y = \text{arc cos}\, x$

6-113. $y = \text{Log}\,(x + \sqrt{1 + x^2})$.
simplificar y'

6-114. $y = \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 3x$

6-115. $y = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

6-116. $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x$

6-117. $y = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{arc\,tg} 2x}$

6-118. $y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

6-119. $y = \operatorname{tg}^3 x^2$.

Calcular la derivada enésima de:

6-120. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$

6-121. $y = \dfrac{1}{x}$

6-122. $y = \cos 2x$

6-123. $y = e^{2x+1}$

6-124. $y = \dfrac{4}{x^2}$

6-125. $y = \operatorname{sen} mx$

6-126. $y = \operatorname{Log} mx$

6-127. $y = \operatorname{Log} \dfrac{1}{x}$

CAPITULO VII

Aplicaciones de las derivadas

1.º Pendiente de la tangente a una curva:

7-1. ¿En qué puntos de la curva $y = x^3 - 12x + 4$ la pendiente de la tangente es igual a 15?

7-2. Hallar las pendientes de las tangentes a la curva

$$y = x(x - 1)(x + 2)$$

de los puntos donde ella corta al eje de las x.

7-3. ¿En qué puntos la curva $2y = 2x^3 - x^2 + 1$ tiene una tangente paralela a la recta

$$y = 10x - 5?$$

7-4. ¿Cuál es la pendiente de la curva $y = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$ cuando $x = 0$?

7-5. ¿En qué puntos la curva

$$y = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos 2x$$

tiene una pendiente nula?

7-6. Lo mismo para la curva

$$y = 2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos 2x,$$

7-7. ¿Bajo qué ángulo la curva $y = x^3 - 2x$ corta a la recta $y = 5$?

7-8. ¿En quó puntos la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ tiene una pendiente igual a 1?

Hallar los valores de x para los cuales las funciones siguientes son crecientes y decrecientes:

7-9. $y = x^2 - 6x + 1$

7-10. $y = x^3 + 3x^2 + 2x - 1$

7-11. $y = x^4 + 4x + 6$

7-12. $y = e^x + e^{-x}$

7-13. $y = (x + 1)^3(2x - 1)^2$

7-14. $y = \dfrac{4x + 5}{2x - 3}$

7-15. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2x^2}}$

7-16. $y = \dfrac{4x}{2 + 4x^2}$

7-17. $y = x^{4/3}$

7-18. $y = \dfrac{(x - 1)^3}{(x + 1)^2}$

Hallar los puntos de inflexión de las curvas de las funciones siguientes:

7-19. $y = x^3 - 6x^2 - 36x + 30$

7-20. $y = -x^4 + 24x^2 + 2$

7-21. $y = x + \dfrac{4}{x}$

7-22. $y = \dfrac{(x - 1)^2}{(x + 3)^3}$

7-23. $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$

7-24. $y = \dfrac{x^2 + 9}{x}$

7-25. $y = x - \dfrac{108}{x^2}$

7-26. $y = x \operatorname{arc\,tg} x$

7-27. $y = \dfrac{2x}{x^3 + 1}$

7-28. $y = x^3 \dfrac{48}{x}$

7-29. $y = x(x - 1)(x + 2)$

7-30. $y = (2x + 1)^3(x - 1)^2$

7-31. $y = \dfrac{x^3 - 16}{x}$

7-32. $y = \dfrac{x^2 - 3x - 19}{x + 4}$

7-33. $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$

7-34. $y = e^{-x^2}$

7-35. $y = (x - 2)^2(x + 1)$

7-36. $y = x(x - 1)^3$

7-37. $y = x^4 - 4x^3 + 10$

7-38. $y = \operatorname{sen}^2 x$

7-39. $y = (x + 2) \operatorname{arc\,tg} x$

7-40. $y = \operatorname{Log} \operatorname{tg}^2 x$

7-41. $y = x^2e^{-x}$

7-42. $y = x^3e^{-x}$

7-43. $y = 2 \operatorname{sen} x + \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2}$

7-44. Demostrar que la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene siempre un punto de inflexión y que su abscisa es $-\dfrac{b}{3a}$. ¿Qué condición debe cumplirse para que este punto de inflexión pueda hallarse sobre el eje de las y?

Búsqueda de los máximos y mínimos:

Hallar los valores de x que hacen mínima o máxima las funciones siguientes, precisando si lo que tenemos es máximo o mínimo.

7-45. $y = x + \dfrac{1}{x}$

7-46. $y = \dfrac{3x}{1 + x^2}$

7-47. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

7-48. $y = 3x^2 + \dfrac{10}{x}$

7-49. $y = \dfrac{3x}{x^3 + 1}$

7-50. $y = x^3 + \dfrac{48}{x}$

7-51. $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$

7-52. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

7-53. $y = x(x - 1)(x + 2)$

7-54. $y = \operatorname{sen}^3 x$

7-55. $y = e^x \cdot \cos x$

7-56. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$

7-57. $y = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} 2x$

7-58. $y = e^{-x} \cdot \operatorname{sen} 2x$

7-59. $y = \cos x - \dfrac{1}{2} \cos 2x$

7-60. $y = (x^2 - 4x)^2$

7-61. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

7-62. $y = \dfrac{x^2 - 7x + 16}{x - 4}$

7-63. $y = x\sqrt{16 - x^2}$

7-64. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 12}$

7-65. $y = x^2\sqrt{24 - x^2}$

7-66. $y = 4 - \sqrt[3]{2x - 4}$

7-67. $y = \dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{1 - x}$

7-68. $y = \dfrac{8x - 1}{(x - 2)^2}$

7-69. $y = \sqrt{1 + \left(\dfrac{ax}{1 + bx^2}\right)^3}$

7-70. $y = \dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg} 2x}$

CAPITULO VIII

Problemas prácticos de búsqueda de máximos o de mínimos

8-1. Una hoja de papel para anuncios tiene una superficie de 1 m^2. Los márgenes de la parte superior e inferior tienen 10 cm y los de los lados tienen 7 cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la hoja (rectangular) para que la superficie impresa sea máxima?

8-2. Un lado de un triángulo tiene 5 m de longitud y el ángulo opuesto tiene 40°. Hallar los otros ángulos cuando su superficie sea máxima.

8-3. Un depósito de sección cuadrada y cerrado por una tapa debe contener 400 m^3. Si el fondo cuesta 400 ptas. el m^2, la tapa 600 ptas. el m^2 y los lados 300 ptas. el m^2, ¿cuáles deben ser las dimensiones del depósito para que el gasto sea mínimo?

8-4. ¿Cuáles son las dimensiones de un triángulo rectángulo de superficie máxima que se puede construir sobre una recta de longitud dada l como hipotenusa?

8-5. Un cono circular recto está inscrito en una esfera de radio R. Hallar la altura del cono para que la superficie lateral sea máxima.

8-6. El mismo problema que en el caso anterior pero siendo ahora el volumen del cono el que debe ser máximo.

8-7. Un depósito abierto superiormente y de sección cuadrada debe tener un volumen de 1.000 m^3. Hallar sus dimensiones para que el precio del revestimiento de plomo del interior sea mínimo.

8-8 Una tienda debe tener la forma de una pirámide cuadrangular regular. Hallar la relación de su altura al lado de su base cuando el volumen de aire interior es máximo para una superficie lateral dada.

8-9. La superficie total de un prisma triangular regular debe ser igual a S. Hallar su altura y el lado de su base cuando el volumen es máximo.

8-10. El número de toneladas de carbón consumidas por hora por un navío es $0{,}2 + 0{,}001\ v^3$, donde v es la velocidad en km/h. Hallar la cantidad de carbón consumida durante un recorrido de 1.000 km, y la velocidad más económica para hacer este viaje.

8-11. ¿Cuál debe ser la altura del cilindro de volumen máximo que puede ser inscrito en un cono recto dado?

8-12. Un triángulo isósceles tiene una base de 20 m y una altura de 15 m. Hallar las dimensiones del rectángulo de superficie máxima que puede ser inscrito en este triángulo, suponiendo que un lado del rectángulo reposa sobre la base del triángulo.

8-13. La superficie de un sector circular es 20 m^2. ¿Cuál debe ser el radio del círculo para que el perímetro del sector sea mínimo?

8-14. Una boya con forma de doble cono debe ser construida por medio de dos placas de hierro circulares de radio R. Hallar el radio de la base del cono para que el volumen de la boya sea máximo.

8-15. Una ventana formada por un rectángulo coronado por un triángulo equilátero tiene 5 m de perímetro. Hallar las dimensiones de la ventana para que deje pasar el máximo de luz.

8-16. Dada una esfera de 1 m de radio, calcular las alturas de los sólidos siguientes:

1.º Cilindro recto inscrito de volumen máximo;
2.º Cilindro recto inscrito de superficie total máxima;
3.º Cono recto inscrito de volumen máximo
4.º Cono circunscrito de volumen mínimo.

8-17. La suma de los perímetros de un cuadrado y de un círculo es constante. ¿Qué relación debe existir entre el diámetro del círculo y el lado del cuadrado para que la superficie total sea mínima?

8-18. El perímetro de un triángulo es de 80 m. Uno de los lados mide 30 m. Hallar las longitudes de los otros dos lados para que la superficie sea máxima.

8-19. Sobre una recta de 1 m de longitud construir un triángulo de 60 cm de altura, de forma que el perímetro sea mínimo.

8-20. En un triángulo la base a y el ángulo opuesto A son fijos. Hallar los otros dos lados:

1.º Cuando la superficie es máxima
2.º Cuando el perímetro es máximo.

8-21. Un cilindro está coronado por un cono cuya altura es igual al diámetro de la base. Hallar las dimensiones que hay que dar a este sólido para que:

1.º el volumen sea máximo, para una superficie total S dada;
2.º la superficie total sea mínima, para un volumen V dado.

8-22. Se da el volumen V de un cono recto. ¿Qué relación existe entre la altura y el radio:

1.º cuando la superficie lateral es mínima;
2.º cuando la superficie total es mínima?

8-23. Dos mástiles de alturas a y b están situados a una distancia d. Hallar un punto sobre la línea que une los pies de los dos mástiles, de forma que la suma de los cuadrados de las distancias de este punto al vértice de cada mástil sea mínima.

8-24. Se quiere construir una caldera cilíndrica de vapor de un volumen de 10 m^3. Los materiales de la pared lateral cuestan 20 pesetas por dm^2 y los de las extremidades 30 pesetas por dm^2. Hallar el radio de la caldera para que el gasto sea mínimo.

8-25. Hallar el número cuyo exceso sobre su cuadrado es máximo.

8-26. Hallar el número que, añadido a su inverso, da una suma mínima.

8-27. Un peso P debe ser elevado mediante una palanca de masa p por metro. El punto de apoyo está en un extremo de la palanca y el peso P está suspendido a una distancia fija a de este extremo. Calcular la longitud de la palanca para que la fuerza necesaria para elevar el peso sea mínima.

8-28. Un navío está anclado a 4 km de la costa, y, frente a un punto situado 6 km más lejos a lo largo de la costa, otro navío está anclano a 10 km de la orilla. Un bote del primer navío debe conducir un pasajero a la orilla y volver a continuación a reunirse con el otro navío. Hallar el trayecto mínimo del bote.

CAPITULO IX

Trazado de las curvas

El alumno podrá trazar las curvas de las funciones indicadas anteriormente, desde **7-45** hasta **7-68**, para las cuales se pedía si se tenía un máximo o un mínimo.

El alumno podrá también trazar las curvas de las funciones dede **7-9** hasta **7-34**, para las cuales se pedía estudiar el crecimiento o decrecimiento, o incluso encontrar los puntos de inflexión.

Trazar las curvas de las funciones siguientes:

9-1. $y = \dfrac{2x - 1}{2x - 2}$

9-2. $y = \dfrac{1}{1 + (1 - x)^2}$

9-3. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{2x^2 - 2}$

9-4. $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 - x - 2}$

9-5. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$

9-6. $y = \dfrac{2x^2 - x - 1}{2x^2 - 2x - 1}$

9-7. $y = \dfrac{2x}{1 + (1 - x)^2}$

9-8. $y = (x + 1)^3(2x - 3)^2$

9-9. $y = \dfrac{(x - 1)^3}{(x - 2)^2}$

9-10. $y = (x - 1)^2(2x - 1)$

9-11. $y = 1 - \sqrt{1 + 4x^2}$

9-12. $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$

9-13. $y = \cos \dfrac{x}{4}$

9-14. $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$

9-15. $y = \operatorname{sen}^2 2x$

9-16. $y = (x - 2)^2(x + 3)(x - 4)$

9-17. $y = \dfrac{x^2 + 25}{x + 1}$

9-18. $y = x + \dfrac{4}{x - 5}$

9-19. $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$

9-20. $y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x + 4}$

9-21. $y = \dfrac{15x^2 - 13x - 20}{8x^2 + 10x - 7}$

9-22. $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

9-23. $y = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$

9-24. $y = \dfrac{3x^2 - 4}{(x-2)^2(x+1)}$

9-25. $y = \dfrac{x^4 - x^2 + 2}{x^4 + 2x^2 + 1}$

9-26. $y = ax\sqrt{a^2 - x^2}$

9-27. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x+1}$

9-28. $y = \dfrac{\cos 3x}{1 + \cos 2x}$

9-29. $y = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen} x)}$

9-30. $y = \dfrac{x^3 + x}{2x + 1}$

9-31. $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{1 + x^2}}$

9-32. $y = x^2 - \operatorname{arc\,tg} x$

9-33. $y = e^{-x} \cdot \operatorname{sen} x$

9-34. $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 9}}$

9-35. $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

9-36. $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{1 + x^2}$

9-37. $y = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$

9-38. $y = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}$

9-39. $y = 2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x$

9-40. $y = \operatorname{arc\,tg} e^x$.

9-41. $y = \sqrt{1 + \left(\dfrac{ax}{1 + bx^2}\right)^2}$

9-42. $y = C \dfrac{L}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}} = f(\omega)$

9-43. $y = \dfrac{m^2\omega^2 R_2}{R_2^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2} = f(\omega)$

9-44. $y = \dfrac{R}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}} = f(R)$

9-45. $y = \operatorname{arc\,tg}\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right) = f(C)$

9-46. $y = E\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right) = f(t)$

9-47. Sea:

$$H = \frac{2P}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}.$$

1.°) Calcular H'_D en función única de H, P, D.

2.°) Calcular H'_d en función única de H, P, D.

CAPITULO X

Otras derivadas
Funciones implícitas

Calcular las derivadas y'_x de las funciones siguientes:

10-1. $x^2y^2 + y = 4$

10-2. $xy = \operatorname{sen} x$

10-3. $y^2(4 - x) = x^2(4 + x)$

10-4. $y^3 + 3x^2y = x^2 - y^2$

10-5. $x^3 + y^3 = 6xy$

10-6. $x^2 + 3xy + 5y^2 = 1$

10-7. $x^2y^2 = 1 + y^2$

10-8. $x^3 - xy^2 = 3xy - 1$

10-9. $xy = (x + y)^2$

10-10. $(x + y)^{2/3} + (x - y)^{2/3} = a^{2/3}$

10-11. $\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 y = 1$

10-12. $e^{x+y} + e^{x-y} = 0$

10-13. $x^{1/3} + y^{1/2} \cdot x^{1/2} = 0$

10-14. $\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{Log} \sqrt{x^2 - y^2}$

10-15. $x^2 \operatorname{sen} y - y^2 \operatorname{sen} x = 1.$

10-16. $3^y \cdot 2^x = \operatorname{arc\,tg} y^2$

10-17. $\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x} = 0$

10-18. $x^2 - y^2 \operatorname{Log} xy = 0$

10-19. $y^3(x - 2) - (x + 2) = 0$

Calcular las derivadas segundas y''_x de las funciones:

10-20. $4x^2 + y^2 = 3$

10-21. $x^4 + y^4 = a^4$

10-22. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$

10-23. $y^2 - 3xy - 2 = 0$

10-24. $x^2 + xy + y^2 = 1$

10-25. $y^3 = m(x^2 + y^2)$

10-26. $xy^2 = x + y.$

Calcular y_x' e y''_x de las funciones:

10-27. $e^x + e^y = 4$

10-28. $x^2 + 2y^2 - 2xy - 1 = 0$

10-29. $\operatorname{sen} x + \cos y = 1$

10-30. $x + \cos(x + y) = 0$

10-31. $e^{xy} - x = 0$

10-32. $x^4 + y^4 = 1$

10-33. $e^x + e^y = e^{x+y}$

10-34. $\sqrt{x + y} = e^x$

10-35. $e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos y = 0$

10-36. $y^2 \cdot \operatorname{Log} x = 4$

10-37. $ye^x = x + y$

10-38. $\sqrt{xy} = 1.$

Funciones paramétricas

Calcular y'_x de las funciones siguientes:

10-39. $\begin{cases} y = 1 - 2t \\ x = 3t^2 - 1 \end{cases}$

10-40. $\begin{cases} y = 1 + t^2 \\ x = \dfrac{1}{1 + t} \end{cases}$

10-41. $\begin{cases} y = 2 \operatorname{sen}^2 \theta \\ x = 4 \cos \theta \end{cases}$

10-42. $\begin{cases} y = \sqrt{5 - t^2} \\ x = \dfrac{1}{t + 1} \end{cases}$

10-43. $\begin{cases} y = \operatorname{sen} 3\theta \\ x = \operatorname{tg} 3\theta \end{cases}$

10-44. $\begin{cases} y = \theta^3 - 3\theta^2 \\ x = \dfrac{1}{3\theta^3 - \theta^2}. \end{cases}$

Calcular y''_x de las funciones siguientes:

10-45. $\begin{cases} y = \dfrac{t^3}{3} \\ x = 1 + 2t \end{cases}$

10-46. $\begin{cases} y = t^3 - 2t \\ x = t^2 - 1 \end{cases}$

10-47. $\begin{cases} y = \dfrac{3}{t} \\ x = 3t \end{cases}$

$\begin{cases} y = \dfrac{1}{t} \\ x = \operatorname{Log} t \end{cases}$

10-49. $\begin{cases} y = \operatorname{sen}^2 t \\ x = \operatorname{sen} 2t \end{cases}$

10-50. $\begin{cases} y = b \operatorname{sen} t \\ x = a \cos t \end{cases}$

10-51. $\begin{cases} y = \cos t + t \cdot \operatorname{sen} t \\ x = \operatorname{sen} t - t \cdot \cos t \end{cases}$

10-52. $\begin{cases} y = e^{at} \\ x = e^{-at} \end{cases}$

10-53. $\begin{cases} y = \operatorname{sen} e^t \\ x = e^t. \end{cases}$

Calcular las derivadas logarítmicas de las funciones siguientes:

10-54. $y = x^2 \sqrt{x^2 + 3}$

10-55. $y = x^{1/2} \cdot \sqrt[3]{6x + 4}$

10-56. $y = \sqrt{\dfrac{(x + 2)(2x + 3)}{x}}$

10-57. $y = \dfrac{x \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

10-58. $y = x^{\sqrt{x}}$

10-59. $y = x^{\operatorname{Log} x}$

10-60. $y = \left(\frac{2}{x}\right)^x$

10-61. $y = (\text{Log } x)^x$

10-62. $y = x^{\text{sen } x}$

10-63. $y = \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2+1}\,\sqrt{x^2+4}}$

10-64. $y = (x+1)x^x$

10-65. $y = x^5 \cdot 3^{x^3}$

10-66. $y = x^{\frac{1}{x}} \cdot \text{Log } x$

10-67. $y = x^2(1-x^2)^{1/2}(1-x^3)^3$

10-68. $y = \dfrac{x^3\sqrt{1+\text{Log } x}}{(1+x)^4}$

10-69. $y = \dfrac{x^2}{(x+1)^2\sqrt{1-x^2}}$

10-70. $y = \sqrt[3]{1-x^2} \cdot \sqrt[4]{1+x^2}$

10-71. $y = \dfrac{(x^2+1)\sqrt{1-5x^2}}{(x^3-1)\sqrt{1-6x^2}}$

10-72. $y = \text{arc tg } x^2)^3 \cdot x^2$

10-73. $y = (\text{Log } x)^4 \cdot e^{1-4x}$

10-74. $y = \sqrt{\dfrac{\text{arc sen } x^2}{\text{arc cos } x^2}}$

10-75. $y = e^{2x} \cdot \text{sen } 4x.$

Derivadas de las funciones compuestas (*a calcular por la fórmula de la derivada de una función compuesta, párrafo 81*):

10-76. $y = \dfrac{4x^2+5x}{4x^2-5}$

10-77. $y = x^{\cos x}$

10-78. $y = (\text{sen } x)^x$

10-79. $y = (\text{tg } x)^{\frac{1}{x}}$

10-80. $y = (\text{sen } x)^{ex}$

10-81. $y = (\text{Log } x)^{\text{Log } x}$

10-82. $y = x^{\text{arc tg } x}$

10-83. $y = (\text{arc tg } x)^{\text{tg } x}$

10-84. $y = (1-x^2)^{1-x^2}$

10-85. $y = (\sqrt{1-4x^2})^x$

10-86. $y = (3x^2-1)\sqrt{4x^2-1}$

10-87. $y = e^{2x} \cdot \text{sen } 4x$

10-88. $y = x^{\text{sen } x}$

10-89. $y = \dfrac{\text{Log } 2x}{\text{Log } x}.$

MELENDEZ VALDES, 14 y 65 · MADRID-15